MATEMÁTICA PARA ECONOMIA III 2015.1 - LISTA DE EXERCÍCIOS 02

Sobre calssificação e solução de Equações Diferenciais.

Determine o tipo, ordem e grau de cada uma das Equações Diferenciais abaixo.

1. $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 6x + y = 0$
2. $\left(\dfrac{d^2y}{dx^2}\right)^2 + 5xy = 0$
3. $\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \dfrac{\partial z}{\partial y} - 2x = 0$
4. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^8$
5. $\left(\dfrac{d^2y}{dx^2}\right)^4 - \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^5 = 4y$

Verificação direta de solução para EDO's.

6. Verifique que $Cx + \frac{1}{8}C^3 - y^2 = 0$ é uma solução para $y^2(y')^3 + 2xy' - y = 0$ e ache a solução particular que satisfaz $y'(0) = 1$.
7. Verifique que $\ln(y) = c_1e^x + c_2e^{-x} + x^2 + 2$ é uma solução geral para
$$\left(\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}\right)^2 - \frac{1}{y}\frac{d^2y}{dx^2} = x^2 - \ln(y).$$

Sobre resolução de EDO's Separáveis e Homogêneas.

Ache a solução geral de cada uma das EDO's abaixo.

8. $x^2 + y^2 - 2xyy' = 0$
9. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x-y}{x+y}$
10. $y' = 2xy$
11. $\dfrac{y^2}{x}dx + (x-y)dy = 0$
12. $x^3 - 2y^3 + 3xy^2\dfrac{dy}{dx} = 0$

Resolva os seguintes problemas de valor inicial.

13. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x} \\ y(1) = 3 \end{cases}$

14. $\begin{cases} 2xyy' - x^2 - y^2 = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$

15. $\begin{cases} (xy^2 + x^2y)dy - xy^2dx = 0 \\ y(6) = 1 \end{cases}$

16. A taxa de acréscimo no custo total y, à medida que o número x de unidades fabricadas aumenta, é proporcional ao número de unidades fabricadas mais uma constante e inversamente proporcional ao custo total. Ache a função de custo se $y(0) = y_0$.

17. A taxa de acréscimo no custo total y, à medida que o número x de unidades fabricadas aumenta, é igual à razão entre o dobro do quadrado do custo menos o quadrado do número de unidades e o produto do custo pelo número de unidades. Ache a relação entre esse custo e o número de unidades sabendo que o custo total de fabricar uma unidade é de 3 reais.

Sobre resolução de EDO's Exatas e Lineares.

Ache a solução geral de cada uma das EDO's abaixo.

18. $x(6xy + 5)dx + (2x^3 + 3y)dy = 0$

19. $y' - y - 3x^2e^x = 0$

20. $\dfrac{dy}{dx} + 2y - x = 0$

21. $(x + y)dx + (x - 2y)dy = 0$

22. $xy' = 5y + x + 1$

Resolva os seguintes problemas de valor inicial.

23. $\begin{cases} e^x \dfrac{dy}{dx} + e^x y - 2x = 0 \\ y(0) = 6 \end{cases}$

24. $\begin{cases} (2y - xy - 3)dx + xdy = 0 \\ y(1) = 1 \end{cases}$

25. A variação do lucro líquido P, quando as despesas x de propaganda variam é dada pela equação

$$\frac{dP}{dx} = k - a(P + x)$$

onde a e k são constantes. Sabendo que o lucro líquido é P_0 quando não há gasto com propaganda, encontre P como função de x.

Sobre resolução de Sistemas de EDO's oriundos de modelos econômicos.

26. No modelo abaixo, considere R o custo para consertar e operar uma máquina e S o valor residual desta máquina. Sabendo que $\alpha > 0$, $\beta \geq 0$, $\lambda > 0$ são constantes dadas no modelo e R_0 e S_0 representam os valores iniciais do custo e do valor residual, respectivamente, resolva o sistema abaixo:

$$\begin{cases} \dfrac{dR}{dt} = \dfrac{\alpha}{S(t)} + \beta \\ \dfrac{dS}{dt} = -\lambda S(t) \\ R(0) = R_0 \\ S(0) = S_0 \end{cases}$$

Soluções

1. ordinária, segunda ordem, primeiro grau
2. ordinária, segunda ordem, segundo grau
3. parcial, primeira ordem, segundo grau
4. parcial, segunda ordem, primeiro grau
5. ordinária, segunda ordem, quarto grau
6. $y^2 = 2x + 1$
7. Verificação direta. Não há resposta
8. $x^2 - y^2 = Cx$
9. $y^2 + 2xy - x^2 = C$
10. $y = Ce^{x^2}$
11. $y = Ce^{y/x}$
12. $x^3 + y^3 = Cx^2$
13. $y = 3x$
14. $y^2 = x^2 - x$
15. $\ln(y) - (x/y) + 6 = 0$
16. $y = (ax^2 + 2abx + y_0^2)^{1/2}$
17. $y = \sqrt{8x^4 + x^2}$
18. $4x^3y + 5x^2 + 3y^2 = C$
19. $y = x^3e^x + Ce^x$
20. $y = \frac{x}{2} - \frac{1}{4} + Ce^{-2x}$
21. $x^2 + 2xy - 2y^2 = C$
22. $20y + 5x + 4 = Cx^5$
23. $ye^x - x^2 = 6$
24. $x^2y + 3(x+1) = 7e^{x-1}$
25. $P(x) = \frac{k+1}{a} - x + \left(P_0 - \frac{k+1}{a}\right)e^{-ax}$
26. $S = S_0e^{-\lambda t}$
    $R = R_0 + \beta t + \frac{\alpha}{\lambda S_0}(e^{\lambda t} - 1)$