4. Derivadas

4.1 Funções Deriváveis

4.1A Em cada caso, encontre a derivada da função $y = f(x)$, usando a definição.

(a) $y = x^2 + 1$ (b) $y = 2x^3$ (c) $y = x^2 - 5$ (d) $y = 2x^2 - 3x$ (e) $y = \dfrac{1}{x+1}$

4.1B Seja f a função definida em $\mathbb{R}$ por $f(x) = \begin{cases} -x, \text{ para } x \leq 0 \\ 2, \text{ para } x > 0 \end{cases}$.

(a) Calcule $f'(-1)$ (b) Existem as derivadas $f'_+(0)$ e $f'_-(0)$? (c) f é derivável em $x = 0$?

4.1C Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função dada por $f(x) = |x| + x$.

(a) Existe $f'(0)$? (b) Existe $f'(x)$ para $x \neq 0$? (c) Como se define a função f'?

4.1D Investigue a derivabilidade da função dada no ponto indicado.

(a) $x = 0$; $f(x) = \begin{cases} x^2, \text{ se } x \leq 0 \\ x, \text{ se } x > 0 \end{cases}$ (b) $x = 1$; $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, \text{ se } 0 < x < 1 \\ 2x - 1, \text{ se } 1 \leq x < 2 \end{cases}$

(c) $x = 1$; $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, \text{ se } 0 < x < 1 \\ \frac{1}{2}(x+1), \text{ se } 1 \leq x < 2 \end{cases}$ (d) $x = 0$; $f(x) = |x|$

4.1E Existe algum ponto no qual a função $y = \left|x^2 - 4x\right|$ não é derivável? Por quê?

4.1F Seja f uma função derivável em $x = 1$ tal que $\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{f(1+h)}{h} = 5$. Calcule $f(1)$ e $f'(1)$.

4.1G Suponha que f seja uma função derivável em $\mathbb{R}$, satisfazendo $f(a+b) = f(a) + f(b) + 5ab$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$. Se $\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{f(h)}{h} = 3$, determine $f(0)$ e $f'(x)$.

4.1H Calcule a e b, de modo que a função $f(x) = \begin{cases} 3x^2, \text{ se } x \leq 1 \\ ax + b, \text{ se } x > 1 \end{cases}$ seja derivável em $x = 1$.

4.1I Em cada caso, determine as equações das retas tangente e normal ao gráfico de f, no ponto cuja abscissa é fornecida.

(a) $f(x) = x^{2/3}, \; x = 8$ (b) $f(x) = x^{-3/4}, \; x = 16$ (c) $f(x) = \sqrt{x}, \; x = 3.$

4.1J Determine a equação da reta tangente à parábola $y = x^2$, com inclinação $m = -8$. Faça um gráfico ilustrando a situação.

4.1K Determine a equação da reta normal à curva $y = -x^3/6$, com inclinação $m = 8/9$.

4.1L Se $y = f(x)$ é a função definida por $y = \begin{cases} \sqrt{x-2}, \text{ se } x \geq 2 \\ -\sqrt{2-x}, \text{ se } x \leq 2 \end{cases}$, encontre as equações das retas tangente e normal ao gráfico de f, no ponto de abscissa $x = 2$.

4.1M Determine a equação da reta que tangencia o gráfico da função $y = x^2$ e é paralela à reta $y = 4x + 2$.

4.1N Verifique que a reta tangente ao gráfico da função $f(x) = 1/x$, no ponto de abscissa $x = a$, intercepta o eixo x no ponto $A(2a, 0)$.

4.1O Determine as retas horizontais que são tangentes ao gráfico da função $g(x) = \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^2}{2} - 2x - 1$.

4.1P Considere a função f definida por $f(x) = \begin{cases} x^2, \text{ se } x \leq 1 \\ 2, \text{ se } x > 1 \end{cases}$.

(a) Esboce o gráfico de f (b) f é contínua em $x = 1$? (c) f é derivável em $x = 1$?

4.1Q Repita o exercício precedente, considerando agora $f(x) = \begin{cases} x^2, \text{ se } x \leq 1 \\ 1, \text{ se } x > 1 \end{cases}$.

4.1R Seja f a função definida em $\mathbb{R}$ por $f(x) = x|x|$.
(a) Determine $f'(x)$, para $x \neq 0$. (b) Existe $f'(0)$? (c) Esboce o gráfico de f e o de f'.

4.2 Regras Básicas de Derivação

4.2A Se $f(x) = 3x^4 + x^3 - 2x$, calcule as derivadas $f'(0)$, $f''(0)$ e $f^{(30)}(0)$.
4.2B Se $y = \dfrac{x+1}{x-1}$, verifique que $(1-x)\dfrac{d^2y}{dx^2} = 2\dfrac{dy}{dx}$.

4.2C Suponha que $x = x(t)$ seja uma função derivável em $\mathbb{R}$. Se $y = \dfrac{1}{x^2+1}$, verifique que, $\forall t \in \mathbb{R}$, tem-se $\dfrac{dy}{dt} = -2xy^2\dfrac{dx}{dt}$.

4.2D Suponha que $x = x(t)$ seja uma função derivável até a segunda ordem. Se $y = x^3$, verifique que $\dfrac{d^2y}{dt^2} = 6x\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2 + 3x^2\dfrac{d^2x}{dt^2}$.

4.2E Sabendo-se que $g(-1) = 2$, $f(2) = -3$, $g'(-1) = -1/3$ e $f'(2) = 6$, determine as equações das retas tangente e normal à curva $h(x) = f(g(x))$, em $x = -1$.

4.2F Se $h(x) = [f(x)]^3 + f\left(x^3\right)$, calcule $h'(2)$, sabendo que $f(2) = 1$, $f'(2) = 7$ e que $f'(8) = -3$.

4.2G Calcule a derivada de primeira ordem de cada uma das funções abaixo.

(a) $y = \dfrac{\pi}{x} + \ln 2$ (b) $y = \dfrac{\pi}{x} + \ln 2$ (c) $y = \dfrac{1}{4} - \frac{1}{3}x + x^2 - 0.5x^4$

(d) $y = \dfrac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$ (e) $y = x \operatorname{arcsen} x$ (f) $y = \dfrac{\left(x^2+1\right)\operatorname{arctg} x - x}{2}$

(g) $y = e^x \cos x$ (h) $y = \dfrac{1}{x} + 2\ln x - \dfrac{\ln x}{x}$ (i) $y = (3 - 2\operatorname{sen} x)^5$

(j) $y = 2x + 5\cos^3 x$ (k) $y = \sqrt{\dfrac{3\operatorname{sen} x - 2\cos x}{5}}$ (l) $y = \sqrt{xe^x + x}$

(m) $y = \arccos(e^x)$ (n) $y = \operatorname{sen}(3x) + \cos(\frac{x}{5}) + \operatorname{tg}(\sqrt{x})$ (o) $y = \dfrac{1+\cos(2x)}{1-\cos(2x)}$

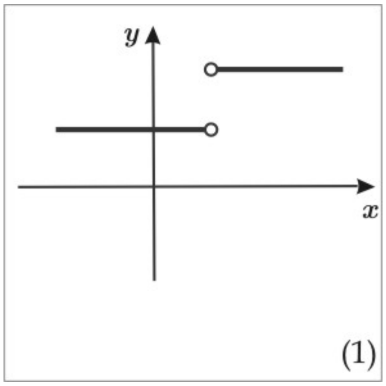
(p) $y = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$ (q) $y = \ln(\operatorname{sen} x)$ (r) $y = \ln^2 x + \ln(\ln x)$

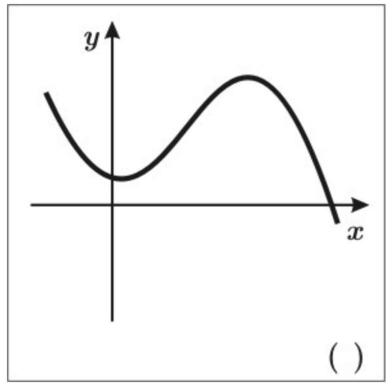
4.2I Verifique que a função $y = xe^{-x}$ é solução da equação $xy' = (1-x)y$.

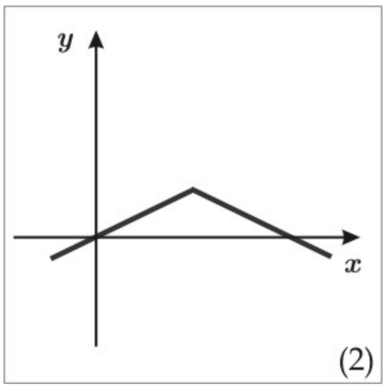
4.2J Verifique que a função $y = \dfrac{1}{1+x+\ln x}$ é solução da equação $xy' = (y\ln x - 1)y$.

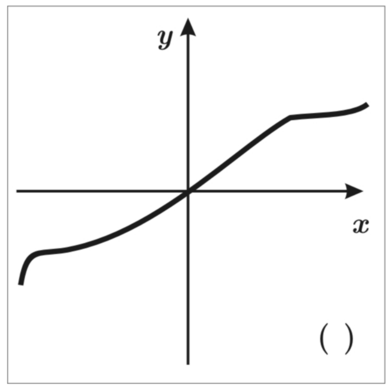
4.2K Se a e b são constantes quaisquer, verifique que a função $y = ae^{-x} + be^{-2x}$ é solução da equação $y'' + 3y' + 2y = 0$.

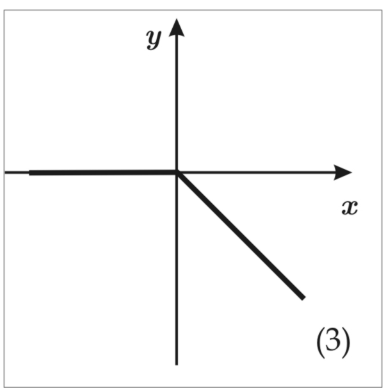
4.2L Os gráficos da coluna da esquerda são das derivadas das funções cujos gráficos estão na coluna da direita. Faça a correspondência, numerando, convenientemente, a coluna da direita.

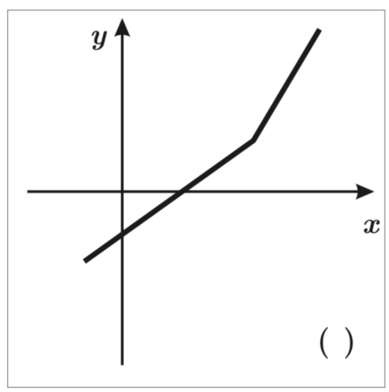

y
x
(1)

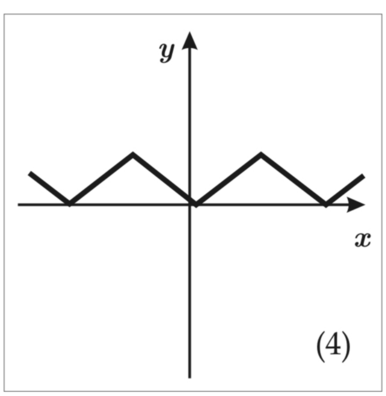

y
x
( )

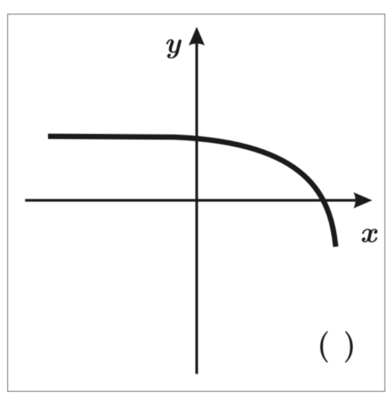

y
x
(2)


y
x
( )


y
x
(3)


y
x
( )


y
x
(4)


y
x
( )

4.3 Regra da Cadeia e Derivação Implícita

4.2A Se $y = x^2 - \sqrt{1+u^2}$ e $u = \dfrac{x+1}{x-1}$, calcule $\dfrac{dy}{dx}$.

4.3B Cada uma das equações abaixo define, implicitamente, y como função de x. Encontre $\dfrac{dy}{dx}$.

(a) $y^3 = x + y$ (b) $\dfrac{y}{x-y} + \dfrac{x}{y} = \sqrt{x}$ (c) $\sqrt{x+y} = \sqrt{y+1}$

(d) $4\cos x \operatorname{sen} y = 1$ (e) $xy = \operatorname{cotg}(xy)$ (f) $\sqrt{xy} = 1 + x^2 y$

4.3C Se n é um número natural, qual é a derivada de ordem n da função $y = (ax+b)^n$?

4.3D Determine as retas tangente e normal à circunferência $x^2 + y^2 = 25$, no ponto $P_0 = (3,4)$.

4.3E Mesma questão precedente, considerando agora a hipérbole $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{9} = 1$ e $P_0 = (-5, 9/4)$.

4.3F Suponha que f seja uma função derivável em seu domínio D e que, para todo x em D, satisfaça $xf(x) + \operatorname{sen}[f(x)] = 4$. Se $x + \cos[f(x)] \neq 0$, mostre que $f'(x) = \dfrac{-f(x)}{x + \cos[f(x)]}$.

4.3G Para cada uma das funções f definidas abaixo, comprove a existência da inversa g, determine o domínio desta última e uma expressão que a defina explicitamente. Esboce os gráficos de f e g.

(a) $f(x) = x^2 - 4,\ x \geq 0$ (b) $f(x) = x^2 - 4,\ x \leq 0$ c) $f(x) = -\sqrt{1-x},\ x \leq 1$

(d) $f(x) = \dfrac{x}{x+1},\ x > -1$ (e) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2+1},\ x \geq 0$ (f) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2+1},\ x \leq 0$

4.3H Por meio de restrições adequadas, faça com que cada uma das funções dadas abaixo gere duas funções invertíveis f_1 e f_2, determinando, em seguida, as respectivas inversas g_1 e g_2. Calcule as derivadas dessas inversas e esboce os gráficos das funções $f_1,\ f_2,\ g_1$ e g_2, em cada caso.

(a) $y = x^2 - 2x - 3$ (b) $y = -x^2 + x + 2$ (c) $y = \sqrt{1-x^2}$ (d) $y = -\sqrt{4-x^2}$

4.3I Verifique que a função $y = f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, definida em $\mathbb{R}$, tem como inversa a função $x = g(y) = \dfrac{y}{\sqrt{1-y^2}}$, definida para $|y| < 1$.

4.3J Qual a inversa da função $f(x) = \dfrac{1}{x}$? E da função $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$? Especifique os domínios e as imagens, esboçando, também, os gráficos.

4.3K Considere a função $y = f(x) = x^2 - x - 2$, definida para $x \geq 1/2$, e seja $x = g(y)$ sua inversa.

(a) Qual o domínio e qual a imagem de g? (b) Sabendo-se que $g(-2) = 1$, calcule $g'(-2)$.

4.3L Use a Regra da Cadeia para mostrar que a derivada de uma função par é uma função ímpar e que a derivada de uma função ímpar é uma função par.

4.4 Mais Funções Elementares

4.4A Considere as funções $f(x) = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg}(1/x)$ e $g(x) = \operatorname{arcsen} x + \arccos x$, definidas, respectivamente, para $x > 0$ e para $x \in [-1, 1]$.

(a) Mostre que $f'(x) = 0, \ \forall x > 0$, e que $g'(x) = 0, \ \forall x \in (-1, 1)$.

(b) Lembrando que as funções constantes são as que possuem derivada nula, deduza que $f(x) = \pi/2$, $\forall x > 0$, e que $g(x) = \pi/2, \ \forall x \in [-1, 1]$.

4.4B Se f é uma função derivável, tal que $f(2) = 1$ e $f'(2) = 1/2$, determine a equação da reta tangente à curva $y = \operatorname{arctg}[f(x)]$, no ponto de abscissa $x = 2$.

4.4C Sabendo-se que no ponto $A(0, 1)$ o gráfico da função $f(x) = \exp\left(x^2 + 2x\right)$ possui a mesma reta tangente que o de uma certa função g, determine $g'(0)$.

4.4D Se f é uma função derivável, tal que $f'(x) = 2xf(x)$, mostre que a função $g(x) = f(x)e^{-x^2}$ é constante.

4.4E Para cada uma das funções definidas abaixo, determine o domínio e calcule a derivada de primeira ordem.

(a) $f(x) = \ln(\sqrt{5 - x^2})$ (b) $f(x) = \ln(\operatorname{sen} x)$ (c) $f(x) = x \ln x - x$

(d) $f(x) = \ln|x|$ (e) $f(x) = 1/\ln x$ (f) $f(x) = \ln(\ln x)$

(g) $f(x) = \ln(\sqrt{\dfrac{2 - x}{3 - x}})$ (h) $f(x) = \ln(\cos(3x + 5))$ (i) $f(x) = \operatorname{sen}(\ln(2x + 3))$

4.4F Considere a função $f(x) = \ln\left(x^2 + 1\right)$.

(a) Qual o domínio de f?

(b) Qual é a equação da reta tangente ao gráfico de f, no ponto de abscissa $x = -1$? E no ponto de abscissa $x = 0$?

4.4G O *logaritmo* de um número $N > 0$, em uma base b, $0 < b \neq 1$, é definido por meio da eqüivalência

$$\log_b N = a \iff b^a = N.$$

(a) Prove a propriedade de Mudança de Base: $\log_b N = \dfrac{\ln N}{\ln b}$

(b) Se f é definida por $f(x) = \log_b x$, para $x > 0$, mostre que $f'(x) = \dfrac{1}{x \ln b}$

4.4H Calcule a derivada de primeira ordem de cada uma das funções abaixo.

(a) $f(x) = e^{\operatorname{sen} x}$ (b) $f(x) = e^{x^2}$ (c) $f(x) = (e^x)^2$

(d) $f(x) = 3^{-x}$ (e) $f(x) = x^x$ (f) $f(x) = x^{(x^x)}$

(g) $f(x) = x^2 3^{x \operatorname{sen} x}$ (h) $f(x) = (x^x)^x$ (i) $f(x) = 2^{x^x}$

4.4I As funções trigonométricas hiperbólicas - *seno hiperbólico, cosseno hiperbólico, tangente hiperbólica* e *cotangente hiperbólica* - denotadas, respectivamente, por senh, cosh, tgh e cotgh, são definidas pelas expressões:

$$\operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \operatorname{tgh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^x} \qquad \operatorname{cotgh} x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^x}$$

Com base nessas definições, mostre que:

(a) $\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1$ (b) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{senh} x}{x} = 1$ (c) $\dfrac{d}{dx}(\operatorname{senh} x) = \cosh x$

(d) $\dfrac{d}{dx}(\cosh x) = \operatorname{senh} x$ (e) $\dfrac{d}{dx}(\operatorname{tgh} x) = (\cosh x)^{-2}$ (f) $\dfrac{d}{dx}(\operatorname{cotgh} x) = -(\operatorname{senh} x)^{-2}$

(A identidade (a) e as derivadas são comprovadas usando as definições das funções hiperbólicas e as regras de derivação. Para provar (b), use o fato: $\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{e^{0+h} - e^0}{h} = \tfrac{d}{dx}(e^x)\big|_{x=0} = 1.$)

4.4J Para cada uma das funções dadas abaixo, calcule o limite quando $x \to 0$.

(a) $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} 2x}{x}$ (b) $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{3x}$ (c) $f(x) = \dfrac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{sen} x}$

(d) $f(x) = \dfrac{\cos 2x}{1 + \operatorname{sen} x}$ (e) $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen}(x^2)}{x}$ (f) $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen}(2x^2)}{3x}$

(g) $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen}(x^3)}{x^3}$ (h) $f(x) = \dfrac{x \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen}(2x^2)}$ (i) $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x \operatorname{sen} 2x}{x \operatorname{sen} 3x}$

4.4K Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função derivável e suponha que exista uma constante k tal que $f'(x) = kf(x)$, $\forall x$. Derive o quociente f/e^{kx} e deduza que existe uma constante C tal que $f(x) = Ce^{kx}$.

4.4L No exercício precedente, suponha que f satisfaça $f'(x) = -2xf(x)$. Mostre que existe uma constante C tal que $f(x) = Ce^{-x^2}$.

4.4M Se f satisfaz $f'(x) = g'(x) f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, mostre que existe C tal que $f(x) = C \exp[g(x)]$.

4.4N Esboce o gráfico da função $y = \ln(1+x)$ e determine a reta normal ao gráfico, que é paralela à reta $x + 2y = 5$.

4.4O Considere a função $f(x) = |x+2|^3$.

(a) Verifique que f é derivável em qualquer x e ache uma expressão para a derivada

(b) Encontre o ponto P_0 onde a tangente ao gráfico de f é horizontal;

(c) Encontre o ponto P_0 onde o ângulo da tangente ao gráfico de f com o eixo x é 60^o.

4.4P Determine as retas tangentes à curva $y = x^2$ que passam no ponto $(0, -1)$.

4.5 Problemas de Taxa de Variação

4.5A Uma partícula se move de modo que, no instante t, a distância percorrida é dada por $s(t) = \frac{1}{3}t^3 - t^2 - 3t$.

(a) Encontre as expressões que fornecem a velocidade e a aceleração da partícula.

(b) Em que instante a velocidade é zero?

(c) Em que instante a aceleração é zero?

4.5B Uma partícula move-se sobre a parábola $y = x^2$. Sabendo-se que suas coordenadas $x(t)$ e y(t) são funções deriváveis, em que ponto da parábola elas deslocam-se à mesma taxa?

4.5C Um ponto move-se ao longo da curva $y = \dfrac{1}{1+x^2}$, de tal modo que sua abscissa x varia a uma velocidade constante de 3 cm/s. Qual será a velocidade da ordenada y, quando $x = 2$ cm?

4.5D Um ponto move-se sobre a parábola $y = 3x^2 - 2x$. Supondo-se que suas coordenadas $x(t)$ e $y(t)$ são funções deriváveis e que $x'(t) \neq 0$, em que ponto da parábola a velocidade da ordenada y será o triplo da velocidade da abscissa x?

4.5E Um cubo se expande de modo que sua aresta varia à razão de $12,5$ cm/s. Encontre a taxa de variação de seu volume, no instante em que a aresta atinge 10 cm de comprimento.

4.5F Uma esfera aumenta de modo que seu raio cresce à razão de $2,5cm/s$. Quão rapidamente varia seu volume no instante em que o raio mede $7,5cm$? (o volume da esfera de raio r é $V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$).

4.5G Sejam x e y os catetos de um triângulo retângulo e θ o ângulo oposto a y. Supondo-se que $x = 12$ e que θ decresce à razão de $1/30\ \text{rad}/s$, calcule $y'(t)$, quando $\theta = \pi/3\ \text{rad}$.

4.5H Uma escada de 8 m está encostada em uma parede vertical. Se a extremidade inferior da escada for afastada do pé da parede a uma velocidade constante de 2 m/s, com que velocidade a extremidade superior estará descendo no instante em que a inferior estiver a 3 m da parede?

4.5I Uma viga medindo 30 m de comprimento está apoiada em uma parede e o seu topo está se delocando a uma velocidade de $0,5\ m/s$. Qual a taxa de variação de medida do ângulo formado pela viga e pelo chão, quando a topo da viga estiver a uma altura de 18 m?

4.5JA A Lei de Boyle para a dilatação dos gases é dada pela equação $PV = C$, onde P é a pressão, medida em Newtons por unidade de área, V é o volume e C é uma constante. Num certo instante, a pressão é de 3.000 N/m^2, o volume é de 5 m^3 e está crescendo à taxa de 2 $m^3/\min$. Qual a taxa de variação da pressão nesse instante?

4.5K Expresse a taxa de crescimento do volume V de uma esfera, relativamente à superfície S, em função do raio r da esfera. Faça o mesmo para o raio, relativamente ao volume.

4.5L Num reservatório contendo um orifício, a vazão pelo orifício é de $110\sqrt{h}\ cm^3/s$, onde h é a altura, em centímetros, do nível da água no reservatório, acima do orifício. O reservatório é alimentado à taxa de 88 $l/\min$. Calcule a altura h do nível a que o reservatório se estabiliza.

4.5M Um balão sobe verticalmente com uma velocidade v e um observador, a certa distância d, vê o balão sob um ângulo de levação θ. Ache uma expressão para a taxa $\dfrac{d\theta}{dt}$ de variação de θ em termos de v, θ e d. A que velocidade sobe o balão se $d = 500\ m$ e $\dfrac{d\theta}{dt} = 0,02\ \text{rad}/s$, quando $\theta = \pi/4\ \text{rad}$.

4.5N Uma bola de neve derrete a uma taxa volumétrica dV/dt proporcional à sua área. Mostre que o seu raio r decresce a uma taxa dr/dt constante.

4.5O Um reservatório cônico, com vértice para baixo, contém água de volume V até uma altura h. Supondo que a evaporação da água se processa a uma taxa dV/dt proporcional à sua superfície, mostre que h decresce a uma taxa dh/dt constante

4.5P Uma piscina está sendo esvaziada de tal forma que $V(t) = 300(20-t)^2$ representa o número de litros de água na piscina t horas após o início da operação. Calcule a velocidade (instatânea) de escoamento da água ao cabo de 8 horas e a velocidade média desse escoamento no mesmo tempo.

4.5Q Uma estátua de altura h está sendo instalada sobre um pedestal de altura l acima do plano horizontal que passa pelo olho de um observador. Com o observador a uma distância x, calcule a taxa de variação, em relação a x, do ângulo θ sob o qual o observador vê a estátua, em termos de h, l e x. Qual o valor dessa taxa se $h = 20$, $l = 5$ e $x = 50$?

4.5R A figura ao lado mostra um reservatório cônico de $10m$ de altura e $4m$ de raio contendo água, que escoa a uma vazão de $5m^3/hora$.

(a) Qual a relação entre as variáveis R e H?

(b) A que taxa o nível da água diminui, quando $H = 6m$?

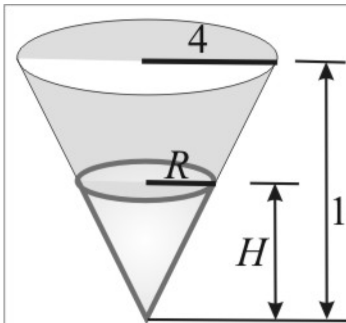


Fig. 4.2

Respostas & Sugestões

4.1A (a) $2x$ (b) $6x$ (c) $2x$ (d) $4x-3$ (e) $-1/(x+1)^2$ **4.1B** (a) -1 (b) $f'_-(0) = -1$ e $f'_+(0)$ não existe (c) não **4.1C** (a) não (b) sim (c) $f'(x) = 2$, se $x > 0$ e $f'(x) = 0$, se $x < 0$ **4.1D** (a) $\nexists$ $f'(0)$ (b) $\nexists$ $f'(1)$ (c) $\exists$ $f'(1)$ e $f'(1) = 1/2$ **4.1E** 0 e 4 **4.1F** $f(1) = 0$ e $f'(1) = 5$ **4.1G** $f(0) = 0$ e $f'(x) = 5x+3$ **4.1H** $a = 6$ e $b = -3$ **4.1I** (a) $y = \frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$ e $y = -3x + 28$ (b)$y = \frac{1}{8} - \frac{3}{2^9}(x-16)$ e $y = \frac{1}{8} - \frac{2^9}{3}(x-16)$ (c) $y = \sqrt{3} + \frac{1}{2\sqrt{3}}(x-3)$ e $y = \sqrt{3} - 2\sqrt{3}(x-3)$ **4.1J** $y = -8x - 16$ **4.1K** $y \pm \frac{9}{16} = \frac{8}{9}(x \mp \frac{3}{2})$ **4.1L** $x = 2$; $y = 0$ **4.1M** $y = 4x - 4$ **4.1O** $y = -13/6$ e $y = 7/3$ **4.1P** (b) não (c) não **4.1Q** (a) sim (b) não **4.1R** (a) $f'(x) = -2x$, se $x < 0$ e $f'(x) = 2x$, se $x > 0$ (b) $f'(0) = 0$ **4.2A** $f'(0) = -2$, $f''(0) = 0$ e $f^{(30)}(0) - 0$ **4.2E** $2x + y + 5 =$

0; $x-2y-5=0$ **4.2F** $h'(2) = -15$ **4.2H** (a) $-\pi/x^2$ (b) $-1/3+2x-2x^3$ (c) $4/3x^2\sqrt[3]{x}-2/3x^3\sqrt{x^2}$ (d) $1/\sqrt{x}\,(1-\sqrt{x})^2$ (e) $\operatorname{arcsen} x + \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ (f) $x \operatorname{arctg} x$(g) $e^x(\cos x - \operatorname{sen} x)$ (h) $\dfrac{2}{x} + \dfrac{\ln x}{x^2} - \dfrac{2}{x^2}$ (i) $-10\,(3-2\operatorname{sen} x)^4 \cos x$ (j) $2 - 15\cos^2 x \operatorname{sen} x$ (k) $\dfrac{3\cos x + 2\operatorname{sen} x}{2\sqrt{15\operatorname{sen} x - 10\cos x}}$ (l) $\dfrac{e^x(x+1)+1}{2\sqrt{x(e^x+1)}}$ (m) $\dfrac{e^{-x}}{\sqrt{1-e^{2x}}}$ (n) $3\cos 3x - \frac{1}{5}\operatorname{sen}(x/5) + \dfrac{1}{2\sqrt{x}\cos^2(\sqrt{x})}$ (o) $-2\operatorname{cotg} x \cos(\sec^2 x)$ (p) $\dfrac{-1}{1+x^2}$ (q) $\operatorname{cotg} x$ (r) $\dfrac{2\ln x}{x} - \dfrac{1}{x\ln x}$ **4.3L** De cima para baixo, a correpondência segue a seqüência 2, 4, 1 e 3 **4.3A** $\dfrac{dy}{dx} = 2x + \dfrac{2u}{(x-1)^2\sqrt{1+u^2}}$ **4.3B** (a) $y' = \dfrac{1}{3y^2-1}$ (b) $y' = \dfrac{(x-y)^2\left[y^2+2\sqrt{x}y^3-2\sqrt{x}y\right]}{2\sqrt{x}\,(x-y)\left[y^2+y^3-x\,(x-y)\right]}$ (c) $y' = \dfrac{\sqrt{y}}{\sqrt{x+y}-\sqrt{y}}$ (d) $y' = \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y$ (e) $y' = \dfrac{-y}{x}$ (f) $y' = \dfrac{4xy\sqrt{xy}-y}{x-2x^2\sqrt{xy}}$ **4.3C** $n!a^n$ **4.3D** $3x+4y=25$ e $4x-3y=0$ **4.3E** $y = \frac{-5}{4}x - 4$ e $y = \frac{4}{5}x + \frac{25}{4}$ **4.3G** (a) $g(y) = \sqrt{y+4},\ -4 \le y$ (b) $g(y) = -\sqrt{y+4},\ -4 \le y$ (c) $g(y) = 1-y^2,\ y \le 0$ (d) $g(y) = \dfrac{y}{1-y},\ y<1$ (e) $g(y) = \sqrt{\dfrac{y}{1-y}},\ 0 \le y < 1$ (f) $g(y) = -\sqrt{\dfrac{y}{1-y}},\ 0 \le y < 1$

4.3H

(a) $\begin{cases} y = x^2-2x-3,\ x \le 1 \\ x = 1-\sqrt{y+4},\ y \ge -4 \end{cases}$ e $\begin{cases} y = x^2-2x-3,\ x \ge 1 \\ x = 1+\sqrt{y+4},\ y \ge -4 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} y = -x^2+x+2,\ x \le 1/2 \\ x = \frac{1}{2}-\sqrt{\frac{9}{4}-y},\ y \le \frac{9}{4} \end{cases}$ e $\begin{cases} y = -x^2+x+2,\ x \le 1/2 \\ x = \frac{1}{2}+\sqrt{\frac{9}{4}-y},\ y \le \frac{9}{4} \end{cases}$

(c) $\begin{cases} y = \sqrt{1-x^2},\ -1 \le x \le 0 \\ x = -\sqrt{1-y^2},\ 0 \le y \le 1 \end{cases}$ e $\begin{cases} y = \sqrt{1-x^2},\ -1 \le x \le 0 \\ x = \sqrt{1-y^2},\ 0 \le y \le 1 \end{cases}$

(d) $\begin{cases} y = \sqrt{4-x^2},\ -2 \le x \le 0 \\ x = -\sqrt{4-y^2},\ -2 \le y \le 0 \end{cases}$ e $\begin{cases} y = -\sqrt{4-x^2},\ 0 \le x \le 2 \\ x = \sqrt{4-y^2},\ -2 \le y \le 0 \end{cases}$

4.3J (a) $x = 1/y,\ y \ne 0$ (b) $x = \dfrac{-y}{y-1},\ y \ne 1$ **4.3K** (a) $D(g) = [\frac{-9}{4}, +\infty)$ e $\operatorname{Im}(g) = [\frac{1}{2}, +\infty)$ (b) $g'(-2) = 1$ **4.4B** $y = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{4}(x-2)$ **4.4C** $g'(0) = 2$ **4.4E** (a) $D(f) =]-\sqrt{5}, \sqrt{5}[$ e $f'(x) = -\dfrac{x}{5-x^2}$ (b) $D(f) =]2k\pi, (2k+1)\pi[$ e $f'(x) = \operatorname{cotg} x$ (c) $D(f) =]0, +\infty[$ e $f'(x) = \ln x$ (d) $D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$ e $f'(x) = 1/x$ (e) $D(f) = \mathbb{R} - \{1\}$ e $f'(x) = -\dfrac{1}{x(\ln x)^2}$

(f) $D(f) =]1, +\infty$ e $f'(x) = -\dfrac{1}{x\ln x}$ (g)$D(f) =]-\infty, 2[\cup]3, +\infty[$ e $f'(x) = -\dfrac{1}{2(2-x)(3-x)}$ (h) $D(f) =]-\frac{1}{3}(2k\pi + \frac{\pi}{2} + 5), \frac{1}{3}(2k\pi + \frac{\pi}{2} - 5)[$ e $f'(x) = -3\,\mathrm{tg}\,(3x+5)$ (i) $D(f) =]-\frac{3}{2}, +\infty[$ e $f'(x) = \dfrac{2}{2x+3}\cos[\ln(2x+3)]$ $\boxed{\textbf{4.4F}}$ (a) $\mathbb{R}$ (b) $y + 1 = -x + \ln 2$; $y = 0$ $\boxed{\textbf{4.4G}}$ Basta notar que $N = b^a \Rightarrow \ln N = a\ln b$ e, portanto, $\log_b N = a = \dfrac{\ln N}{\ln b}$ $\boxed{\textbf{4.4H}}$ (a) $\cos x \exp(\mathrm{sen}\, x)$ (b) $2x\exp\left(x^2\right)$ (c) $2\exp(2x)$ (d) $-3^{-x}\ln 3$ (e) $x^x(1+\ln x)$ (f) $x^{(x^x)}[x^x\ln x(1+\ln x) + x^{x-1}]$ (g) $3^{x\,\mathrm{sen}\,x}[2x + x^2\ln 3(\mathrm{sen}\,x + x\cos x)]$ (h) $(x^x)^x[x + 2x\ln x]$ (i) $2^{x^x}[x^x(1+\ln x)]\ln 2$ $\boxed{\textbf{4.4J}}$ (a) 2 (b) 1/3 (c) 1 (d) 1 (e) 0 (f) 0 (g) 1 (h) 1/2 (i) 2/3 $\boxed{\textbf{4.4N}}$ $x + 2y = \ln 4 - 1$ $\boxed{\textbf{4.4O}}$ (a) $f'(x) = |x+2|(x+2)$ (b) $(-2, 0)$ (c) $(-2 \pm 1/3^{3/4}, \pm 1/81\sqrt{3})$ $\boxed{\textbf{4.4P}}$ $y = \pm 2x - 1$ $\boxed{\textbf{4.5A}}$ (a) $v(t) = t^2 - 2t - 3$; $a(t) = 2t - 2$ (b) $t = 3$ (c) $t = 1$ $\boxed{\textbf{4.5B}}$ $P = (1/2, 1/4)$ $\boxed{\textbf{4.5C}}$ $\dfrac{-12}{25}cm/s$ $\boxed{\textbf{4.5D}}$ No ponto de abscissa $x = \frac{5}{6}$ $\boxed{\textbf{4.5E}}$ $3750cm^3/s$ $\boxed{\textbf{4.5F}}$ $562,5\pi cm^3/s$ $\boxed{\textbf{4.5G}}$ $-\frac{8}{5}$ unid/s $\boxed{\textbf{4.5H}}$ $-\frac{6}{\sqrt{55}}m/s$ $\boxed{\textbf{4.5I}}$ $-\frac{1}{48}\,\mathrm{rad}/s$ $\boxed{\textbf{4.5J}}$ $-1200N/m^2$ $\boxed{\textbf{4.5K}}$ $\frac{dV}{dS} = \dfrac{r}{2}$ e $\frac{dr}{dV} = \dfrac{1}{4\pi r^2}$ $\boxed{\textbf{4.5L}}$ $h = \frac{1600}{9}cm$ $\boxed{\textbf{4.5M}}$ $\frac{d\theta}{dt} = \dfrac{v\cos^2\theta}{d}$ e $v = 20m/s$ $\boxed{\textbf{4.5P}}$ $-\frac{dV}{dt} = 7200\ l/h$ e $\frac{V}{t} = 5400\ l/h$ $\boxed{\textbf{4.5Q}}$ $\frac{d\theta}{dx} = \dfrac{1}{x^2 + l^2} - \dfrac{h + l}{x^2 + (h+l)^2}$ e $\frac{d\theta}{dx} = \dfrac{1}{125}$ $\boxed{\textbf{4.5R}}$ $\frac{dH}{dt} = -\frac{125}{144\pi}\ m/h$