3. Limite e Continuidade

3.1 Cálculo de Limites

3.1A Em cada caso abaixo calcule o limite de $f(x)$, quando $x \to a$.

(a) $f(x) = 2x + 5;\ a = -7$

(b) $f(x) = \dfrac{3}{\sqrt{3x+1}+1};\ a = 0$

(c) $f(x) = \dfrac{x^2 + 3x - 10}{x+5};\ a = -5$

(d) $f(x) = \dfrac{-2x-4}{x^3+2x^2};\ a = -2$

(e) $f(x) = \dfrac{x-1}{\sqrt{x+3}-2};\ a = 1$

(f) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+8}-3}{x+1};\ a = -1$

(g) $f(x) = \dfrac{x^4-1}{x^3-1};\ a = 1$

(h) $f(x) = \dfrac{3-\sqrt{x}}{9-x};\ a = 9$

(i) $f(x) = \dfrac{x^2+x}{x};\ a = 0$

(j) $f(x) = \dfrac{x^2+8x-20}{x^2-x-2};\ a = 2$

(k) $f(x) = \dfrac{1-\sqrt{1+x}}{\sqrt{x-1}-x};\ a = 3$

(l) $f(x) = \dfrac{x^4-2x+1}{x^3+2x^2+1};\ a = 1$

(m) $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{2}}{x-2};\ a = 2$

(n) $f(x) = \dfrac{\left(3-x^3\right)^4-16}{x^3-1};\ a = 1$ (faça $u = 3 - x^3$)

(o) $f(x) = \sqrt{\dfrac{\sqrt{x^2+3}-2}{x^2-1}};\ a = 1$

(p) $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x+2}-1}{x+1};\ a = -1$ (faça $u = \sqrt[3]{x+2}$)

3.1B Se f é uma função definida em $\mathbb{R}$ e $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} = 1$, mostre que:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f(3x)}{x} = 3$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f\left(x^2\right)}{x} = 0$

3.1C Se $\displaystyle\lim_{x\to -2}\frac{f(x)}{x^2} = 1$, calcule $\displaystyle\lim_{x\to -2} f(x)$ e $\displaystyle\lim_{x\to -2}\frac{f(x)}{x}$.

3.1D Sabendo-se que $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-5}{x-2} = 3$, calcule $\displaystyle\lim_{x\to 2} f(x)$.

3.1E Se φ é uma função tal que $1 - \dfrac{x^2}{4} \le \varphi(x) \le 1 + \dfrac{x^2}{2}$, $\forall x \neq 0$, calcule $\displaystyle\lim_{x\to 0}\varphi(x)$.

3.1F Sejam f e g funções definidas em D, tais que $\displaystyle\lim_{x\to a} f(x) = 0$ e $|g(x)| \le M,\ \forall x \in D$, sendo M uma constante positiva. Use o Teorema do Sanduíche e mostre que $\displaystyle\lim_{x\to a}\left[f(x)\cdot g(x)\right] = 0$.

3.1G Considere a função g definida por $g(x) = \begin{cases} 1, \text{ se } x \leq 0 \\ -1, \text{ se } x > 0 \end{cases}$. Investigue a existência dos limites: $\lim\limits_{x \to 0} g(x)$ e $\lim\limits_{x \to 0} x^2 g(x)$.

3.1H Em cada caso abaixo, calcule os limites laterais de f no ponto a.

(a) $f(x) = \dfrac{x+3}{x+2}$, $a = -2$ (b) $f(x) = \dfrac{x}{(x-2)^2}$, $a = 2$

(c) $f(x) = \dfrac{2-x}{(1-x)^3}$, $a = 1$ (d) $f(x) = \dfrac{x^2-4}{|x-2|}$, $a = 2$

(e) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+4x+5}-\sqrt{5}}{x}$, $a = 0$ (f) $f(x) = \dfrac{(x+3)|x+2|}{x+2}$, $a = -2$

(g) $f(x) = \dfrac{\sqrt{2x}(x-1)}{|x-1|}$, $a = 1$ (h) $f(x) = \dfrac{x+3}{|x^2-9|}$, $a = -3$

(i) $f(x) = \dfrac{x^2-1}{|x-1|}$, $a = 1$ (j) $f(x) = \dfrac{x+2}{|x^2-4|}$, $a = -2$

3.1I Calcule $\lim\limits_{x \to 2^+} \sqrt{x-2}$ e verifique se existe o limite $\lim\limits_{x \to 2^-} \sqrt{x-2}$.

3.1J Calcule os limites laterais indicados.

(a) $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x}$ (b) $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1}{x}$ (c) $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x^2}$ (d) $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1}{x^2}$

(e) $\lim\limits_{x \to 3^+} \dfrac{5}{x-3}$ (f) $\lim\limits_{x \to 3^-} \dfrac{5}{x-3}$ (g) $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{2x+1}{x}$ (h) $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{x-3}{x^2}$

(i) $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{3}{x^2-x}$ (j) $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{3}{x^2-x}$ (k) $\lim\limits_{x \to 3^+} \dfrac{x^2-3x}{x^2-6x+9}$ (l) $\lim\limits_{x \to -1^-} \dfrac{|x-1|}{x-1}$

(m) $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{2x+1}{x^2+x}$ (n) $\lim\limits_{x \to -1^+} \dfrac{3x^2-4}{1-x^2}$ (o) $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x}{|x|}$ (p) $\lim\limits_{x \to -1^+} \dfrac{x^2+3}{x^2-1}$

3.1K Calclule os seguintes limites no infinito.

(a) $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^4+3x+2)$ b) $\lim\limits_{x \to -\infty} (x^4-3x+2)$ (c) $\lim\limits_{x \to +\infty} (3x^3+2x+1)$

(d) $\lim\limits_{x \to -\infty} (3x^3+2x+1)$ (e) $\lim\limits_{x \to +\infty} (5-4x+x^2-x^5)$ (f) $\lim\limits_{x \to -\infty} (5-4x+x^2-x^5)$

(g) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{5x^3-6x+1}{6x^3+2}$ (h) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{5x^3-6x+1}{6x^3+2}$ (i) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x}+1}{x+3}$

(j) $\lim\limits_{x \to +\infty} (x-\sqrt{x+3})$ (k) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x-\sqrt{x^2+3}\right)$ (l) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x-\sqrt{x^3+3}\right)$

(m) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(2x-\sqrt{x^3+3}\right)$ (n) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{5-x}{3+2x}$ (0) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2-\sqrt{|x|}}{\sqrt{1-x}}$

3.2 Continuidade

3.2A Qual das afirmações abaixo é verdadeira?

(a) $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) \Longrightarrow f$ é contínua em $x = a$;

(b) Se $\lim_{x\to a} |f(x)|$ existe, então $\lim_{x\to a} f(x)$ também existe;

(c) Se $\lim_{x\to a} |f(x)| = 0$, então $\lim_{x\to a} f(x) = 0$.

3.2B Calcule $\lim_{x\to 1} f(x)$, onde a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é definida por $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1}, \text{ se } x \neq 1 \\ 3, \text{ se } x = 1 \end{cases}$.

Esta função é contínua em $x = 1$?

3.2C Seja f uma função real contínua, definida em torno do ponto $a = 1$, tal que $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x - 1}$, para $x \neq 1$. Quanto vale $f(1)$? Por quê?

3.2D Determine o valor de k, de modo que cada uma das funções dadas abaixo seja contínua no ponto a indicado.

(a) $a = 2$; $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3-8}{x-2}, \text{ se } x \neq 2 \\ k, \text{ se } x = 2 \end{cases}$ (b) $a = 3$; $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x-3}, \text{ se } x > 0 \text{ e } \neq 3 \\ k, \text{ se } x = 3 \end{cases}$.

3.2E Seja f a função definida por: $f(-1) = 2$ e $f(x) = \dfrac{x^2 + x}{x + 1}$, para $x \neq -1$. A função f é contínua no ponto $x = -1$? Por quê? E no ponto $x = 0$?

3.2F Dê exemplo de uma função f, definida em $\mathbb{R}$, descontínua no ponto $x = 2$, mas que satisfaça $\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^-} f(x)$.

3.2G Seja f uma função tal que $|f(x)| \leq x^2$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Mostre que f é continua em $x = 0$.

3.2H Esboce o gráfico e encontre os pontos de descontinuidade da função f, definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x^2+3}{5}, \text{ se } x \leq 1 \\ 6 - 5x, \text{ se } 1 < x < 3 \\ x - 3, \text{ se } x \geq 3 \end{cases}.$$

3.2I Em cada caso, esboce o gráfico da função e diga se ela é contínua no ponto a indicado.

(a) $a = 0$; $f(x) = \begin{cases} 2 - x, \text{ se } x > 1 \\ x^2, \text{ se } x \leq 1 \end{cases}$ (b) $a = 0$; $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-2}{|x-2|}, \text{ se } x \neq 2 \\ 1, \text{ se } x = 2 \end{cases}$

(c) $a = -1$; $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 3}{x+1}$ (d) $a = 1$; $f(x) = \begin{cases} 0, \text{ se } x < 0 \\ [x], \text{ se } x \geq 0 \end{cases}$.

Nota: No Exercício 3.20(d), $[x]$ representa o *maior inteiro menor ou igual a* x e a função correspondente $x \longmapsto [x]$ é denominada *função escada.*

3.2J Seja f a função cujo gráfico encontra-se esboçado abaixo.

(a) Calcule $\lim_{x \to 0} f(x)$.

(b) Calcule $\lim_{x \to 3} f(x)$.

(c) Calcule $f(0)$.

(d) Calcule$f(3)$.

(e) f é contínua no ponto $x = 0$?

(f) f é contínua no ponto $x = 3$?

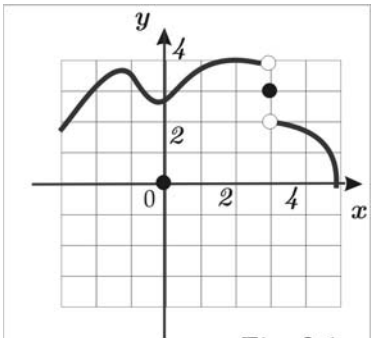

Fig. 3.1

3.2K Existe um número real α capaz de fazer com que $\lim_{x \to -2} \dfrac{3x^2 + \alpha x + \alpha + 3}{x^2 + x - 2}$ exista?

3.2G Uma companhia ferroviária cobra R\$10,00 por km, para transportar um vagão até uma distância de $200km$, cobrando ainda R\$8,00 por cada km que exceda a 200. Além disso, essa mesma companhia cobra uma taxa de serviço de R\$1.000,00 por vagão, independentemente da distância a percorrer.

Determine a função que representa o custo para transportar um vagão a uma distância de x km e esboce seu gráfico. Essa função é contínua em $x = 200$?

3.2L Uma fábrica é capaz de produzir 15.000 unidades de um certo produto, em um turno de 8 horas de trabalho. Para cada turno de trabalho, sabe-se que existe um custo fixo de R\$2.000,00, relativo ao consumo de energia elétrica. Supondo-se que, por unidade produzida, o custo variável, dado o gasto com matéria prima e salários, é de R\$2,00, determine a função que representa o custo total para a fabricação de x unidades e esboce seu gráfico. A função encontrada é contínua para $0 \leq x \leq 45.000$?

3.2M Um estacionamento cobra R\$3,00 pela primeira hora, ou parte dela, e R\$2,00 por hora sucessiva, ou parte dela, até o máximo de R\$10,00. Esboce o gráfico do custo do estacionamento como uma função do tempo decorrido e analise as descontinuidades dessa função.

3.2N Prove que a equação $x^5 + x + 1 = 0$ tem pelo menos uma raiz no intervalo $[-1, 0]$.

3.2O Prove que a equação $x^3 - 4x + 2 = 0$ admite três raízes reais e distintas.

3.2P Considere a função f definida por: $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2, \text{ se } -2 \leq x \leq 0 \\ -x^2 - 2, \text{ se } 0 \leq x \leq 2 \end{cases}$. Mostre que não existe um número α no intervalo $[-2, 2]$ tal que $f(\alpha) = 0$. Isto contradiz o corolário do Teorema do valor Intermediário?

3.2Q Quais das seguintes afirmações sobre a função $y = f(x)$ ilustrada abaixo são verdadeiras e quais são falsas?

(a) $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ existe.

(b) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$.

(c) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$.

(d) $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 1$.

(e) $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 0$.

(f) $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ existe no ponto a em $(-1, 1)$.

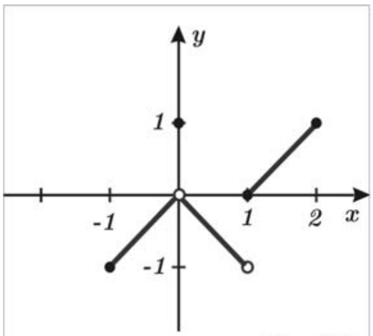

Fig. 3.2

3.2R Explique por que os limites abaixo não existem.

(a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{|x|}$ (b) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x}{x-1}$ (c) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x+3}{(x-1)(x+2)}$ (d) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^2+3}{x}$

3.3 Respostas e Sugestões

$\boxed{\textbf{3.1A}}$ (a) -9 (b) $3/2$ (c) -7 (d) $-1/2$ (e) 4 (f) $-1/3$ (g) $4/3$ (h) $1/6$ (i) 1 (j) 4 (k) $1/(3-\sqrt{2})$ (l) 0 (m) $\frac{1}{3}\sqrt[3]{4}$ (n) -32 (o) $1/2$ (p) $1/3$ $\boxed{\textbf{3.1B}}$ (a) Com $u = 3x$ tem-se $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(3x)}{x} = 3 \lim\limits_{u \to 0} \dfrac{f(u)}{u}$. Em (b), faça $u = x^2$ e encontre $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x^2)}{x} = \pm \lim\limits_{u \to 0} \dfrac{\sqrt{u} f(u)}{u}$ $\boxed{\textbf{3.1C}}$ 4 e -2 $\boxed{\textbf{3.1D}}$ 5 $\boxed{\textbf{3.1E}}$ 1 $\boxed{\textbf{3.1F}}$ Temos: $0 \leq |f(x) \cdot g(x)| \leq M |f(x)|$ $\boxed{\textbf{3.1G}}$ $g(x)$ não tem limite em $x = 0$ e $\lim\limits_{x \to 0} [x^2 g(x)] = 0$

3.1H		(a)	(b)	(c)	(d)	(e)	(f)	(g)	(h)	(i)	(j)
	$\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	-4	$2\sqrt{5}/5$	-1	$-\sqrt{2}$	$-1/6$	-2	$-1/4$
	$\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	4	$2\sqrt{5}/5$	1	$\sqrt{2}$	$1/6$	2	$1/4$

3.1I Quando $x \to 2^+$ o limite existe e vale 0. Quando $x \to 2^-$ o limite não existe.

3.1J	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)	(f)	(g)	(h)	(i)	(j)	(k)	(l)	(m)	(n)	(o)	(p)
	∞	$-\infty$	∞	∞	∞	$-\infty$	∞	$-\infty$	$-\infty$	∞	∞	∞	∞	$-\infty$	1	$-\infty$

3.1K	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)	(f)	(g)	(h)	(i)	(j)	(k)	(l)	(m)	(n)	(o)
	∞	∞	∞	$-\infty$	$-\infty$	∞	$5/6$	∞	0	∞	0	$-\infty$	∞	$-1/2$	-1

3.2A (a) falsa (b) falsa (c) verdadeira **3.2B** $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 2$ e $f(1) = 3$. Logo, f é descontínua em $a = 1$ **3.2C** Como f é contínua em $a = 1$, devemos ter $f(1) = -1$ **3.2D** (a) $k = 12$ (b) $k = \sqrt{3}/6$ **3.2E** f é contínua em -1 e descontínua em 0 **3.2F** Considere, por exemplo, a função f definida assim: $f(x) = x$, para $x \neq 2$ e $f(2) = 0$ **3.2G** Use o Teorema do Sanduíche **3.2H** $x = 3$ é a única descontinuidade de f **3.2I** (a) sim (b)sim (c) não (d) não **3.2J** (a) 3 (b) não existe (c) 3 (d) 4 (e) sim (f) não **3.2K** Se $\alpha = 15$, o limite será -1 **3.2L** Se $x \leq 200$, o custo $C(x)$ é determinado em reais por $C(x) = 1.000 + 10x$. O custo para uma distância de 200 km é, portanto, $C(200) = R\$3.000,00$. Se a distância excede 200 km, isto é, se $x > 200$, então o custo total será dado por $C(x) = 3.000 + 8(x - 200)$. Resumindo, temos: $C(x) = 1000 + 10x$, se $0 < x \leq 200$, e $C(x) = 1400 + 8x$, para $x > 200$. Essa função é contínua em $x = 200$ **3.2M** Se $0 \leq x \leq 15000$, um único turno de trabalho será suficente e, assim, $C(x) = 2000 + 2x$. Se $15000 < x \leq 45000$, então a fábrica deverá operar em 3 turnos e, nesse caso, $C(x) = 6000 + 10x$. Nesse intervalo a função custo é descontínua **3.2N** As descontinuidades ocorrem nos pontos $t = 1$, $t = 2$, $t = 3$ e $t = 4$ **3.2P** Não. Como a função não é contínua em $[-2, 2]$, o fato não contradiz o resultado citado **3.2Q** V, V, F, F, F, V **3.2R** Em cada caso note que os limites laterais, quando existem, são diferentes.