2. Funções e Gráficos

2.1 Domínio e Imagem

2.1A Dê o domínio e esboce o gráfico de cada uma das funções abaixo.

(a) $f(x) = 3x$ (b) $g(x) = -x$ (c) $h(x) = -x + 1$

(d) $f(x) = \frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$ (e) $g(x) - \frac{1}{2}x$ (f) $g(x) = |x - 1|$

(g) $h(x) = \begin{cases} x, \text{ se } x \leq 2 \\ 3, \text{ se } x > 2 \end{cases}$ (h) $h(x) = \begin{cases} 2x, \text{ se } x \leq -1 \\ -x + 1, \text{ se } x > -1 \end{cases}$ (i) $h(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x - 1}$

(j) $f(x) = |x + 2| + 1$ (k) $h(x) = \dfrac{|2x + 1|}{2x + 1}$ (l) $h(x) = |x + 2|$

(m) $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$ (n) $g(x) = \dfrac{|x - 1|}{x - 1}$ (o) $g(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x + 1}$

2.1B Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = |x - 1| + |x - 2|$. Mostre que:

$$f(x) = \begin{cases} -2x + 3, \text{ se } x \leq 1 \\ 1, \text{ se } 1 < x < 2 \\ 2x - 3, \text{ se } x \geq 2 \end{cases}$$

e esboce o gráfico de f.

2.1C Determine o domínio das funções indicadas abaixo.

(a) $f(x) = \dfrac{1}{x - 1}$ (b) $y = \dfrac{x}{x^2 - 1}$ (c) $s(t) = \sqrt{t^2 - 1}$ (d) $y = \dfrac{x}{x + 2}$

(e) $h(x) = \sqrt{x + 2}$ (f) $q(x) = \dfrac{x + 1}{x^2 + x}$ (g) $r(x) = \sqrt{\dfrac{x - 1}{x + 1}}$ (h) $y = \sqrt[4]{\dfrac{x}{x + 3}}$

(i) $g(x) = \sqrt[3]{x^2 - x}$ (j) $y = \sqrt{x(2 - 3x)}$ (k) $f(x) = \sqrt{\dfrac{2x - 1}{1 - 3x}}$ (l) $y = \sqrt[6]{\dfrac{x - 3}{x + 2}}$

(m) $g(x) = \dfrac{2x}{x^2 + 1}$ (n) $y = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x - 1}}$ (o) $y = \sqrt{4 - x^2}$ (p) $y = \sqrt{5 - 2x^2}$

(q) $y = \sqrt{x - 1} + \sqrt{3 - x}$ (r) $y = \sqrt{1 - \sqrt{x}}$ (s) $y = \sqrt{x} - \sqrt{5 - 2x}$ (t) $y = \sqrt{x - \sqrt{x}}$

2.1D Utilizando o procedimento indicado no Exercício 2.1B, esboce o gráfico das funções definidas abaixo.

(a) $f(x) = |x| - 1$ (b) $g(x) = ||x| - 1|$ (c) $h(x) = |x+1| - |x|$ (d) $y = \left|x^2 - 1\right|$

2.1E Uma pequena indústria fabrica termômetros e estima que o lucro semanal, em reais, pela fabricação e venda de x unidades/semana é de $R(x) = -0,001x^2 + 8x - 5000$. Qual o lucro da empresa em uma semana que foram fabricados 1.000 termômetros?

2.1F Determine o domínio da função $f(x) = \sqrt{4 - \left|\dfrac{3-2x}{2+x}\right|}$.

2.1G Considere a função f definida em $[-3, 2]$ por $f(x) = \left|x^3 - 2x^2 + 3x - 4\right|$. Determine dois números reais m e M tais que $m \leq f(x) \leq M$, seja qual for o valor de x no intervalo $[-3, 2]$.

2.1H Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2 + 4x + 5$.

(a) Verifique que $f(x) = (x+2)^2 + 1$;

(b) Esboce o gráfico de f;

(c) Calcule o menor valor de $f(x)$ e para qual x esse valor é assumido.

2.1I Verifique que $\sqrt{1+x^2} - |x| = \dfrac{1}{|x| + \sqrt{1+x^2}}$ e, então, conclua que a medida que x cresce, o valor da diferença $\sqrt{1+x^2} - |x|$ aproxima-se de zero.

2.1J Seja $y = f(x)$ a função dada a partir da equação $x^2 + y^2 = 4$, para $y \geq 0$.

(a) Determine uma fórmula que defina explicitamente y como função de x;

(b) Determine o domínio de f;

(c) Esboce o gráfico de f.

2.1K Uma caixa retangular sem tampa, com volume de $2m^3$, tem uma base quadrada. Expresse a área S da superfície da caixa como uma função do comprimento x de um lado da base.

2.1L À medida que o ar seco move-se para cima, ele se expande e esfria. Sabendo-se que a temperatura do solo é de 20^0C e que a temperatura a $1km$ de altura é de 10^0C, expresse a temperatuta T, em ^0C, como uma variável dependente da altura h, medida em km, supondo que um modelo baseado em uma função *afim* seja apropriado. Qual a temperatura a uma altura de $2,5km$?

2.1M Suponha que a figura abaixo representa graficamente uma função $y = f(x)$.

(a) Determine $f(-1)$.

(b) É correta a estimativa $2 < f(2) < 3$?

(c) Para quais valores de x tem-se $f(x) = 2$?

(d) Para quantos valores de x tem-se $f(x) = 0$?

(e) Qual o domínio de f?

(f) Qual a imagem de f ?

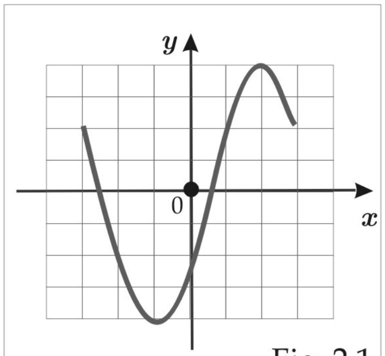

Fig. 2.1

2.1N Considere as funções f e g, cujos gráficos são representados na figura abaixo.

(a) Obtenha os valores de $f(-4)$ e $g(3)$.

(b) Para quais valores de x, $f(x) = g(x)$?

(c) Estabeleça o domínio e a imagem de f.

(d) Estabeleça o domínio e a imagem de g.

(e) Para quantos valores de x, $f(x) = 0$?

(f) Para quantos valores de x, $g(x) = 0$?

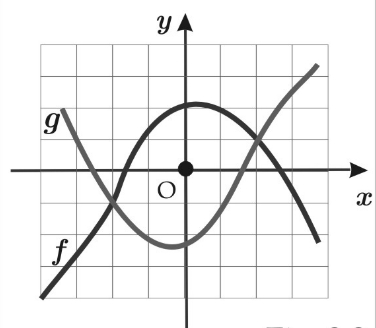

Fig. 2.2

Definição Se uma função f satisfaz $f(x) = f(-x)$, para todo x em seu domínio, então f é denominada *função par*. Se f satisfaz $f(x) = -f(-x)$, para todo x em seu domínio, então f é denominada uma *função ímpar*.

2.1O Com base na definição acima, classifique cada uma das funções abaixo.

(a) $f(x) = x^3$ (b) $g(x) = x^2$ (c) $h(x) = 2x - x^2$ (d) $k(x) = 1 - x^4$ (e) $f(x) = |x|$.

2.1P Dada uma função f, definida em $\mathbb{R}$ ou em um intervalo $(-a, a)$, mostre que $g(x) = f(x) + f(-x)$ é uma função par e que $h(x) = f(x) - f(-x)$ é uma função ímpar. Deduza a partir daí que qualquer função f, definida em um intervalo $(-a, a)$, pode ser expressa como soma de uma função par com uma função ímpar.

Definição As funções $f : A \to B$ e $g : A' \to B'$ são iguais quando $A = A'$, $B = B'$ e $f(x) = g(x)$, $\forall x \in A$.

2.1Q Diga se f e g são iguais em cada um dos casos abaixo.

(a) $f(x) = \sqrt{x}\sqrt{x-1}$ e $g(x) = \sqrt{x^2 - x}$ (b) $f(x) = x^2$ e $g(x) = |x|^2$

(c) $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}$ e $g(x) = x+1$ (d) $f(x) = x$ e $g(x) = \sqrt{x^2}$

2.1R Determine a função quadrática f que satisfaz $f(0) = 5,\ f(-1) = 10$ e $f(1) = 6$.

Definição Uma função f é *crescente* em um intervalo I, se dados $x_1,\ x_2 \in I$, com $x_1 < x_2$, tem-se $f(x_1) < f(x_2)$. Se $f(x_1) \le f(x_2)$, para $x_1 < x_2$, então f é dita não-decrescente em I.

Definição Uma função f é *decrescente* em um intervalo I, se dados $x_1,\ x_2 \in I$, com $x_1 < x_2$, tem-se $f(x_1) > f(x_2)$. Se $f(x_1) \ge f(x_2)$, para $x_1 < x_2$, então f é dita não-crescente em I.

2.1S Mostre que a *função afim* $f(x) = ax + b$ é crescente, se $a > 0$, e decrescente, se $a < 0$.

2.1T Com relação ao gráfico apresentado no Exercício 2.1M, identifique o conjunto no qual f é uma função crescente.

Função Composta Considere duas funções f e g tais que a imagem de f seja um subbconjunto do domínio de g, isto é, $\operatorname{Im}(f) \subset D(g)$. Denominamos de *composta* de g e f, e anotamos $g \circ f$, a função com domínio $D(f)$ e definida por: $(g \circ f)(x) = g(f(x))$, com $x \in D(f)$.

2.1U Nos casos a seguir, verifique que $\operatorname{Im}(f) \subset D(g)$ para, assim, determinar a função composta $h = g \circ f$.

(a) $f(x) = x^2$ e $g(x) = \sqrt{x}$ (b) $f(x) = x^2 + 3$ e $g(x) = \dfrac{x+1}{x-2}$

(c) $f(x) = -\sqrt{x}$ e $g(x) = \sqrt{2-x}$ (d) $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$ e $g(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$

2.1V Determine a função f de modo que $(g \circ f)(x) = x$, $\forall x \in D(f)$, onde:

(a) $g(x) = \dfrac{x+2}{x+1}$ (b) $g(x) = x^2 - 2x$, definida para $x \ge 1$.

2.1W Considere f uma função par e seja $h = g \circ f$. Mostre que h é uma função par. E se f for uma função ímpar, pode-se afirmar que h também o será?

2.2 Invertendo uma Função Real

■ **Função Injetora** Diz-se que uma função f é *injetora* (ou *injetiva*) se dado $y \in \operatorname{Im}(f)$, existe um único $x \in D(f)$ tal que $y = f(x)$. Isto é equivalente a: $f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2$.

■ **Função Sobrejetora** Diz-se que $f : D(f) \to B$ é *sobrejetora* (ou *sobrejetiva*) se $\operatorname{Im}(f) = B$, isto é, dado $y \in B$, existe $x \in D(f)$ tal que $y = f(x)$.

■ **Função Bijetora** Diz-se que uma função f é *bijetora* (ou *bijetiva*) quando for, simultaneamente, injetora e sobrejetora. Neste caso, temos:

$$\begin{aligned} f : D(f) &\longrightarrow \operatorname{Im}(f) \\ x &\longmapsto f(x) = y \end{aligned}$$

e podemos definir a função $g : \operatorname{Im}(f) \longrightarrow D(f)$, *inversa* de f, do modo seguinte:

$$y = f(x) \Leftrightarrow x = g(y).$$

A função g, inversa de f, é caracterizada por: $(f \circ g)(y) = y$ e $(g \circ f)(x) = x$. É comum representar a função inversa de f por f^{-1}.

2.2A Verifique que a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 3x + 5$ é bijetora e determine sua inversa.

2.2B Considere a função do exercício precedente e determine a inversa da função $f \circ f^{-1}$.

2.2C Dê domínio e contra-domínio adequados à função $f(x) = x^2$, de modo que a mesma seja invertível e determine a sua inversa.

2.2D Considere a função $f(x) = k/x$, onde k é uma constante. É necessário impor alguma restrição à constante k para que f seja invertível? Quem é f^{-1}?

2.2E Considere $f : [1/2, +\infty) \to [b, +\infty)$ definida por $f(x) = x^2 - x + 1$. Qual o valor de b que torna f invertível? Quem é f^{-1}? Esboce o gráfico de f^{-1}.

Respostas & Sugestões

2.1A As funções apresentadas em (a), (b), (c), (d), (e), (f), (g), (h), (j) e (l) têm para domínio o conjunto $\mathbb{R}$ dos numeros reais. Por outro lado, temos: (i) $\mathbb{R} - \{1\}$ e $h(x) = x + 1$, se $x \neq 1$ k) $\mathbb{R} - \{-1/2\}$ (m) $\mathbb{R} - \{0\}$ (n) $\mathbb{R} - \{1\}$ (o) $\mathbb{R} - \{-1\}$ e $g(x) = x - 1$, se $x \neq -1$

2.1C (a) $\mathbb{R} - \{1\}$ (b) $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$ (c) $(-\infty, -1) \cup [1, +\infty)$ (d) $\mathbb{R} - \{-2\}$ (e) $[-2, +\infty)$ (f) $\mathbb{R} - \{-1, 0\}$

(g) $(-\infty,-1)\cup[1,+\infty)$ (h) $(-\infty,-3)\cup[0,+\infty)$ (i) $\mathbb{R}$ (j) $[0,2/3]$ (k) $(1/3,1/2]$ (l) $(-\infty,-2)\cup[3,+\infty)$ (m) $\mathbb{R}$ (n) $[0,+\infty)-\{1\}$ (o) $[-2,2]$ (p) $[-\sqrt{\frac{5}{2}},\sqrt{\frac{5}{2}}\,]$ (q) $[1,3]$ (r) $[0,1]$ (s) $[0,5/2]$ (t) $[1,+\infty)\cup\{0\}$ $\boxed{\mathbf{2.5}}$ R\$2.000,00 $\boxed{\mathbf{2.6}}$ $D(f)=\mathbb{R}-(-11/2,-5/6)$ $\boxed{\mathbf{2.1G}}$ $M=58$ e $m=0$ $\boxed{\mathbf{2.1H}}$ (c) 1; $x=-2$ $\boxed{\mathbf{2.1J}}$ (a) $y=\sqrt{4-x^2}$ (b) $[-2,2]$ $\boxed{\mathbf{2.1K}}$ $S(x)=x^2+8/x$ $\boxed{\mathbf{2.1L}}$ $T(h)=-10h+20;\ T(2,5)=-5^0C$ $\boxed{\mathbf{2.1M}}$ (a) -4 (b) sim (c) $x=-3,\ x=1$ (d) para dois valores (e) $[-3,3]$ (f) $[-4,4]$ $\boxed{\mathbf{2.1N}}$ (a) $f(-4)=-2;\ g(3)=3$ (b) $x=-2,\ x=2$ (c) $D(f)=[-4,4]\,;\ \mathrm{Im}(f)=[-2,3]$ (d) $D(g)=[-4,3]\,;\ \mathrm{Im}(g)=[1/2,3]$ (e) para dois valores (f) nenhum $\boxed{\mathbf{2.1O}}$ (a) ímpar (b) par (c) nem par nem ímpar (d) par (e) par $\boxed{\mathbf{2.1P}}$ As funções f e g são iguais apenas no caso (b) $\boxed{\mathbf{2.1Q}}$ $f(x)=3x^2-2x+5$ $\boxed{\mathbf{2.1S}}$ A função f é crescente no intervalo $[0,3]$ $\boxed{\mathbf{2.21}}$ (a) $\mathrm{Im}(f)=D(g)=[0,+\infty)$ e $h(x)=|x|$ (b) $\mathrm{Im}(f)=[3,+\infty)\subset D(g)=\mathbb{R}-\{2\}$ e $h(x)=\dfrac{x^2+4}{x^2+1}$ (c) $\mathrm{Im}(f)=(-\infty,0)\subset D(g)=(-\infty,2]$ e $h(x)=\sqrt{2+\sqrt{x}},\ x>0$ (d) $\mathrm{Im}(f)=D(g)=\mathbb{R}-\{1\}$ e $h(x)=-2x-1,\ x\neq-1$ $\boxed{\mathbf{2.1T}}$ (a) $f(x)=\dfrac{x-2}{1-x}$ (b) $f(x)=1+\sqrt{1+x}$ $\boxed{\mathbf{2.1U}}$ Podemos concluir que h é uma função ímpar, se f e g o forem $\boxed{\mathbf{2.2A}}$ $f^{-1}(x)=\frac{1}{3}(x-5)$ $\boxed{\mathbf{2.2B}}$ $f\circ f^{-1}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, dada por $\left(f\circ f^{-1}\right)(x)=x$ $\boxed{\mathbf{2.2C}}$ $D(f)=CD(f)=[0,+\infty)$ e $f^{-1}(x)=\sqrt{x}$ $\boxed{\mathbf{2.2D}}$ $k\neq0$ e $f^{-1}=f$ $\boxed{\mathbf{2.2E}}$ $b=3/4$. A inversa é a função $g:[3/4,+\infty)\to[1/2,+\infty)$, definida por $g(y)=\frac{1}{2}+\sqrt{y-\frac{3}{4}}$