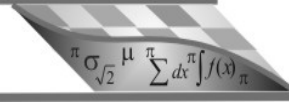


1. Números Reais



1.1 Propriedades Algébricas

1.1A Classifique as afirmações em *verdadeiras* ou *falsas*, justificando cada resposta.

- (a) Se $x < 2$, então $x^2 < 4$. (b) Se $x^2 < 4$, então $x < 2$. (c) $x < 2 \Leftrightarrow x^2 < 4$.
(d) Se $x < 2$, então $x \leq 3$. (e) Se $x = 3$, então $x \leq 3$. (f) Se $|x| > 2$, então $x > 2$.

1.1B Se p é um número inteiro tal que p^2 é divisível por 3, mostre que p também o é. Use este fato para mostrar que o número $\sqrt{3}$ não é racional.

1.1C Mostre que a soma e o produto de dois números racionais é um número racional. O produto de dois números irracionais é irracional? E a soma?

1.1D Se r é um número racional e x é irracional, mostre que $x + r$ é também irracional. Se $r \neq 0$, mostre que o produto xr é irracional.

1.1E Sejam x e y dois números irracionais, de tal forma que $x^2 - y^2$ seja um racional não nulo. Mostre que os números $x - y$ e $x + y$ são irracionais. Por exemplo, $\sqrt{3} + \sqrt{2}$ e $\sqrt{3} - \sqrt{2}$ são irracionais.

1.1F Reduza os números $x = 5,2121\dots$ e $y = 0,21507507\dots$ à forma de fração ordinária.

1.1G Estude o sinal de cada uma das expressões abaixo.

- (a) $\frac{x-1}{x-2}$ (b) $(2x+1)(x-2)$ (c) $\frac{2-3x}{x+2}$ (d) $x(x-1)(2x+3)$
(e) $(2x-1)(x^2+1)$ (f) $x(x^2+3)$ (g) $x^6(x^2+3)$ (h) $-x(x^2-4)$

1.2 Resolvendo Desigualdades

1.2A Em cada caso, resolva a desigualdade.

- (a) $(4x+7)^{20}(2x+8) < 0$ (b) $\frac{2x-1}{x-3} > 5$ (c) $\sqrt[3]{x^2-1} \leq 0$ (d) $x(2x-1)(x+1) > 0$
(e) $(2x-1)(x+3) < 0$ (f) $\frac{x}{2x-3} \leq 3$ (g) $\frac{2x-1}{x+1} < 0$ (h) $3x^2 \geq 8$
(i) $\frac{x-3}{x^2+1} < 5$ (j) $\frac{3x-2}{2-x} \leq 0$ (k) $x^2 < r^2, r > 0$ (l) $\frac{x^2-9}{x+1} < 0$

$$(m) x^2 \leq 4 \quad (n) x^2 > r^2, r > 0 \quad (o) x^4 < x^2 \quad (p) x^3 - x \leq 0$$

$$(q) x^2 - 4 > 0 \quad (r) \frac{x^2 - 4}{x^2 + 4} > 0 \quad (s) (2x + 1)(x^2 + 4) > 0 \quad (t) (2x - 1)(x^2 - 4) \leq 0$$

1.2B Repita o exercício precedente com as desigualdades.

$$(a) x^2 - 3x + 2 < 0 \quad (b) x^2 + x + 1 \leq 0 \quad (c) 3x^2 + x - 2 > 0$$

$$(d) 4x^2 - 4x + 1 \leq 0 \quad (e) x^2 + 3 > 0 \quad (f) x^2 + x + 1 > 0$$

$$(g) x^2 - 5x + 6 \geq 0 \quad (h) x^2 + 5 \leq 0 \quad (i) (x - 2)(x + 3)(1 - x) > 0$$

$$(j) x^2 + 1 < 3x - x^2 - 3 \quad (k) \frac{3x(x + 4)^2}{(x - 2)^2} < 0 \quad (l) (x^2 - 4)(x^2 - 3x + 2) \leq 0$$

1.2D Resolva as equações.

$$(a) |x| = 2 \quad (b) |x + 1| = 3 \quad (c) |2x - 1| = 1 \quad (d) |x - 2| = -1$$

$$(e) |2x + 3| = 0 \quad (f) |x| = 2x + 1 \quad (g) |1 - 2x| = |3x + 5| \quad (h) \sqrt{(x - 4)^2} = -1$$

$$(i) \sqrt{(x - 1)^2} = 5 \quad (j) \sqrt{(2 - x)^2} = 4 \quad (k) \left| \frac{x}{1 - 5x} \right| = 4 \quad (l) x = \sqrt{(-4)^2}$$

1.2E Dê o conjunto solução de cada uma das inequações modulares abaixo.

$$(a) |x| \leq 1 \quad (b) |2x - 1| < 3 \quad (c) |x| > 3 \quad (d) |3x + 3| \leq 1/3$$

$$(e) |2x^2 - 1| < 1 \quad (f) |3x - 1| < -2 \quad (g) |x + 3| \geq 1 \quad (h) |2x - 1| < x$$

$$(i) |x + 1| < |2x - 1| \quad (j) |x - 2| - |x - 5| > x \quad (k) |(x - 1)^3| < 1 \quad (l) |x - 1| + |x + 3| < |4x|$$

1.2F Duas desigualdades são ditas *equivalentes*, se possuem o mesmo conjunto de soluções. Com base nesta definição, classifique as duplas de desigualdades abaixo.

$$(a) \sqrt{x - 1} < \sqrt{2 - x} \quad \text{e} \quad x - 2 < 1 - x \quad (b) x^2 > 1 \quad \text{e} \quad 1 + \frac{2}{x - 1} > 0$$

1.2G Resolva os sistemas de inequações.

$$(a) \begin{cases} 8x - 2 < x - 1 \\ 2x^2 - x \leq 1 \end{cases} \quad (b) \begin{cases} 4x^2 - 4x - 3 < 0 \\ 1/x^2 \geq 1 \end{cases}$$

1.2H Mostre que: (a) $x + \frac{1}{x} \geq 2, \forall x > 0$ (b) não existem x e y reais tais que $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{x + y}$.

Respostas & Sugestões

1.1A (a) F (b) V (c) F (d) V (e) V (f) F **1.1F** $x = 516/99$ e $y = 21486/99900$.

1.1G

	+	-	0	não definida
(a)	$x < 1$ ou $x > 2$	$1 < x < 2$	$\{1\}$	$x = 2$
(b)	$x < -1/2$ ou $x > 2$	$-1/2 < x < 2$	$\{-1/2, 2\}$	
(c)	$-2 < x < 2/3$	$x < -2$ ou $x > 2/3$	$\{2/3\}$	$x = -2$
(d)	$(-3/2, 0) \cup (1, \infty)$	$(-\infty, -3/2) \cup (0, 1)$	$\{0, 1, -3/2\}$	
(e)	$x > 1/2$	$x < 1/2$	$\{1/2\}$	
(f)	$x > 0$	$x < 0$	$\{0\}$	

1.2A

- (a) $x < -4$ (b) $3 < x < 14/3$ (c) $-1 \leq x \leq 1$ (d) $-1 < x < 0$ ou $x > 1/2$
 (e) $-3 < x < 1/2$ (f) $x < \frac{3}{2}$ ou $x \geq \frac{9}{5}$ (g) $-1 < x < 1/2$ (h) $x \leq -2\sqrt{\frac{2}{3}}$ ou $x \geq 2\sqrt{\frac{2}{3}}$
 (i) $(-\infty, +\infty)$ (j) $x \leq 2/3$ ou $x > 2$ (k) $-r < x < r$ (l) $x < -3$ ou $-1 < x < 3$
 (m) $-2 \leq x \leq 2$ (n) $x > r$ ou $x < -r$ (o) $-1 < x < 1$ (p) $x \leq -1$ ou $0 \leq x \leq 1$
 (q) $x < -2$ ou $x > 2$ (r) $x > 2$ ou $x < -2$ (s) $(-1/2, +\infty)$ (t) $x \leq -2$ ou $\frac{1}{2} \leq x \leq 2$

1.2B

- (a) $1 < x < 2$ (b) \emptyset (c) $x < -1$ ou $x > 2/3$ (d) $x = 1/2$
 (e) \mathbb{R} (f) \mathbb{R} (g) $x \geq 3$ ou $x \leq 2$ (h) \emptyset
 (i) $x < -3$ ou $1 < x < 2$ (j) \emptyset (k) $x < 0$ e $x \neq 2$ (l) $-2 \leq x \leq 1$ ou $x = 2$

1.2D

- (a) $x = \pm 2$ (b) $x = 2$ ou $x = -4$ (c) $x = 0$ ou $x = 1$ (d) \emptyset
 (e) $x = -3/2$ (f) $x = -1/3$ (g) $x = -4/5$ ou $x = -6$ (h) \emptyset
 (i) $x = 6$ ou $x = -4$ (j) $x = -2$ ou $x = 6$ (k) $x = 4/21$ ou $x = 4/19$ (l) $x = 4$

1.2E

- (a) $-1 \leq x \leq 1$ (b) $-1 < x < 2$ (c) $x < -3$ ou $x > 3$ (d) $-10/9 \leq x \leq -8/9$
 (e) $-1 < x < 1, x \neq 0$ (f) \emptyset (g) $x \leq -4$ ou $x \geq -2$ (h) $1/3 < x < 1$
 (i) $x < 0$ ou $x > 2$ (j) $x < -3$ (k) $0 < x < 2$ (l) $x < -1$ ou $x > 1$

- 1.2F** (a) não equivalentes (b) equivalentes **1.2G** (a) $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{7})$ (b) $[-\frac{1}{2}, 0) \cup (0, 1]$