UFPB/CCEN/DM

Matemática Elementar I - Turma 2 - 2013.2

Lista de Exercícios - DATA DE ENTEGRA: 11/02/2014

Aluno (a): ____ Matrícula: ________________

PRIMEIRA PARTE (ASSUNTO ABORDADO NA PROVA DE 13/12/2013)

1. Considere $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Dê um exemplo de uma relação em A que seja
   (a) Reflexiva, mas não transitiva e não simétrica.
   (b) Simétrica, mas não reflexiva e não transitiva.
   (c) Transitiva, mas não reflexiva e não simétrica.
   (d) Reflexiva e transitiva, mas não simétrica.
   (e) Transitiva e simétrica, mas não reflexiva.
   (f) Reflexiva e simétrica, mas não transitiva.
   (g) Nem reflexiva, nem simétrica e nem transitiva.

2. Se uma relação $\mathcal{R}$ em um conjunto A for tal que $D(\mathcal{R}) = A$ e for transitiva e simétrica, mostre que $\mathcal{R}$ tem que ser reflexiva.

3. Seja P uma partição de um conjunto A. Considere a seguinte relação em A:

$$x \sim y \Leftrightarrow \exists X \in P \text{ tal que } x \in X \text{ e } y \in X.$$

   (a) Mostre que $\sim$ é uma relação de equivalência e que $A/\sim = P$.
   (b) Considere $A = \mathbb{R}$ e $P = \{(-\infty, -1), [-1, 1], (1, +\infty)\}$. Sendo $\sim$ a relação de equivalência gerada por essa partição, determine $[\sqrt{5}]$ e $[-3/5]$.

4. Seja $n \in \mathbb{N}$ um número natural fixo. No conjunto dos números inteiros, considere a seguinte relação:

$$x \sim y \Leftrightarrow x - y \text{ é múltiplo de } n$$

   (a) Prove que esta relação é uma relação de equivalência
   (b) Descreva todos os elementos do conjunto $\mathbb{Z}/\sim$

5. Determine se as relações abaixo são ou não relações de equivalência. Justifique.

(a) Em $\mathbb{R}$, considere a relação $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{N}$.

(b) Em $\mathbb{Z}^*$, considere a relação $x\mathcal{S}y \Leftrightarrow xy > 0$.

6. Considere $f : A \to B$ uma função. Defina a seguinte relação em A: $x \sim y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$.

   (a) Mostre que $\sim$ é uma relação de equivalência em A.

   (b) Tome, por exemplo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ de forma que

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } \ x \leq 0 \\ 0 & \text{se } \ 0 < x \leq 1 \\ 1 & \text{se } \ x > 1 \end{cases}.$$

   Considerando a relação $\sim$ do item anterior para este exemplo, determine o conjunto quociente $\mathbb{R}/\!\sim$.

7. Seja $\mathcal{U}$ um conjunto universo. Em $\mathcal{P}(\mathcal{U})$ defina a seguinte relação $\mathcal{R}$:

$$A\mathcal{R}B \Leftrightarrow \exists f : A \to B \ \text{ bijetiva.}$$

   Mostre que $\mathcal{R}$ é uma relação de equivalência.

8. Considere $A \subset \mathcal{U}$. Em $\mathcal{P}(\mathcal{U})$, defina a seguinte relação:

$$X \sim Y \Leftrightarrow A \cap X = A \cap Y.$$

   Mostre que $\sim$ é uma relação de equivalência em $\mathcal{P}(\mathcal{U})$.

9. Seja $A = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Considere a seguinte relação em A:

$$(p, q) \sim (r, s) \Leftrightarrow p + s = q + r$$

   (a) Mostre que $\sim$ é uma relação de equivalência em A.

   (b) Considere a função $f : A/\!\sim \to \mathbb{Z}$ dada por $f\big(\,\overline{(p,q)}\,\big) = p - q$. Mostre que f é realmente função de $A/\!\sim$ em $\mathbb{Z}$ e prove que é bijetiva.

10. Seja $B = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$. Considere a seguinte relação em B:

$$(p, q) \sim (r, s) \Leftrightarrow ps = qr$$

   (a) Mostre que $\sim$ é uma relação de equivalência em B.

   (b) Considere a função $f : B/\!\sim \to \mathbb{Q}$ dada por $f\big(\,\overline{(p,q)}\,\big) = p/q$. Mostre que f é realmente função de $B/\!\sim$ em $\mathbb{Q}$ e prove que é bijetiva.

(a) Seja $f : A \to B$ uma função sobrejetiva. Seja P uma partição de B. Mostre que $S \overset{def}{=} \{f^{-1}(Y);\ Y \in P\}$ é uma partição para A.

(b) Seja $g : A \to B$ uma função injetiva. Seja Q uma partição de A. Mostre que $R \overset{def}{=} \{f(X);\ X \in Q\}$ é uma partição para $f(A)$.

11. Seja A um conjunto finito. Mostre que uma função $f : A \to A$ é injetiva se e somente se f for sobrejetiva. Dê exemplos de que esse resultado não é verdade se A for infinito.

12. Seja A um conjunto enumerável. Dado $a \in A$, mostre que $A - \{a\}$ ainda é enumerável.

13. Seja A um conjunto enumerável e B um conjunto finito. Construa uma bijeção entre A e $A \cup B$.

14. Mostre que A é um conjunto infinito se e somente se A contém um conjunto enumerável.

SEGUNDA PARTE (cardinalidade, conjuntos não-enumeráveis)

1. Mostre que $\mathbb{R}$ e $]0,1[$ têm a mesma cardinalidade (tome $f(x) = e^x/(e^x+1)$ se $x \in]0,1[$ e mostre que esta regra define uma bijeção entre estes conjuntos). Conclua que $\mathbb{R}$ não é enumerável.

2. Seja A um conjunto infinito e B um conjunto não-vazio. Mostre que $A \times B$ é infinito.

3. Seja A um conjunto enumerável. Mostre que existe um conjunto $B \subset A$ tal que $A - B$ é ainda enumerável.

4. Mosque que um conjunto A é infinito se e somente se existe $B \subset A$, subconjunto próprio, isto é $B \neq A$ tal que $\#A = \#B$.

5. Seja A um conjunto qualquer. Mostre que não existe função sobrejetora de A em $\mathcal{P}(A)$. Siga a sugestão: fixe $F : A \to \mathcal{P}(A)$ uma função qualquer e considere $X = \{x \in A;\ x \notin F(x)\}$. Mostre que X não pertence à imagem da função F. Observação: concluimos assim que $\mathcal{P}(A)$ é um conjunto cuja cardinalidade é sempre maior que a cardinalidade de A.

6. Considere o conjunto $\mathcal{F}$ dado por

$$\mathcal{F} = \{f;\ f : \mathbb{N} \to \{0,1\} \text{ é função } \},$$

isto é, $\mathcal{F}$ é o conjunto de todas as funções de $\mathbb{N}$ em $\{0,1\}$.

(a) Mostre que $\mathcal{F}$ é um conjunto não-enumerável. (uma dica: se $\mathcal{F}$ fosse enumerável, seria uma sequência de funções. Isto é, $\mathcal{F}$ seria igual a $\{f_1, f_2, f_3, \dots\}$, onde cada f_i é uma função de $\mathbb{N}$ em $\{0,1\}$. Você consegue construir uma função $f : \mathbb{N} \to \{0,1\}$ diferente de todas estas f_i?)

(b) Mostre que $\mathcal{F}$ está em bijeção com $\mathcal{P}(\mathbb{N})$: considere a seguinte função $G : \mathcal{F} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ dada por $G(f) = \{k \in \mathbb{N};\ f(k) = 1\}$. Mostre que G é bijetiva.