

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Interpolação de Rotações de Objetos Sólidos via Quatérnios

Por
Edson Leite Araújo

sob orientação do
Prof. Dr. Lenimar Nunes de Andrade

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática-CCEN-UFPB, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Dezembro 2000
João Pessoa, Paraíba

Interpolação de Rotações de Objetos Sólidos via Quatérnios

por

Edson Leite Araújo

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática-CCEN-UFPB, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Computação Gráfica

Aprovada por:

Lenimar Nunes de Andrade
Orientador

Romildo José da Silva

Hélio Pires de Almeida

**Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática**

Dezembro 2000

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA

Data: **Dezembro 2000**

Autor: **Edson Leite Araújo**

Título: **Interpolação de Rotações de Objetos Sólidos via
Quatérnios**

Depto.: **Matemática**

Grau: **Mestre** Convocação: **Dezembro** Ano: **2000**

Permissão está juntamente concedida pela Universidade Federal da Paraíba à circular e ser copiado para propósitos não comerciais, em sua discricão, o título acima sob a requisição de indivíduos ou instituições.

Assinatura do Autor

O AUTOR RESERVA OUTROS DIREITOS DE PUBLICAÇÃO, E NEM A TESE NEM EXTENSIVAS EXTRAÇÕES DELA PODEM SER IMPRESSAS OU REPRODUZIDAS SEM A PERMISSÃO ESCRITA DO AUTOR.

O AUTOR ATESTA QUE A PERMISSÃO TEM SIDO OBTIDA PELO USO DE QUALQUER DIREITO AUTORAL DO MATERIAL EM QUE ESTA TESE APAREÇA(OU BREVES RESUMOS REQUERENDO APENAS O PRÓPRIO AGRADECIMENTO NO MATERIAL ESCRITO) E QUE TODOS OS TAIS USOS SEJAM CLARAMENTE AGRADECIDOS.

À minha querida e amada esposa Sônia.

Sumário

Tabela de Conteúdo	vi
Lista de Figuras	vii
Agradecimentos	viii
Resumo	x
Abstract	xi
1 Introdução	1
2 Rotações	4
2.1 Rotações no Plano	4
2.1.1 Notação Matricial	6
2.1.2 Notação Complexa	6
2.1.3 Matrizes ou Números Complexos?	8
2.2 Rotações em \mathbb{R}^3	8
2.2.1 Rotações Usando Matrizes	9
2.2.2 Rotações Usando Ângulos de Euler	10
3 Quatérnios	13
3.1 Fundamentos Históricos	13
3.2 Matemática Quaterniônica Básica	15
3.3 Propriedades Algébricas dos Quatérnios	21
3.4 Quatérnios Unitários	23
3.5 Funções Exponencial e Logaritmo	25
3.6 Rotação com Quatérnios	28
3.6.1 Os quatérnios q e q^{-1}	35
3.6.2 Os quatérnios q e $-q$	36
3.6.3 Quatérnios Não-unitários	36

3.7	Quatérnios e o Cálculo Diferencial	37
3.8	Quatérnios: Vantagens e Desvantagens	41
4	Interpolação de Rotações	43
4.1	Interpolação entre Duas Rotações	43
4.1.1	Interpolação Linear de Euler: <i>LinEuler</i>	44
4.1.2	Interpolação Linear Matricial: <i>LinMat</i>	44
4.1.3	Interpolação Linear Quatérnia: <i>Lerp</i>	44
4.1.4	Interpolação Linear Quatérnia Esférica: <i>Slerp</i>	45
4.2	Interpolação entre uma Sequência de Rotações	52
5	Combinando Curvas Circulares	55
5.1	Introdução	55
5.2	Curvas Circulares em S^2	55
5.3	Grande Esfera em S^3	58
5.4	Curvas Circulares em S^3	60
5.5	Parametrização de Curvas Circulares	65
5.5.1	Casos Degenerados	71
5.5.2	Suavidade da Curva Circular	72
5.6	Curva Circular Quatérnia em $SO(3)$	73
5.7	Combinando Curvas Circulares em S^3	74
6	Conclusões	80
A	Códigos Fontes	82
A.1	Produto de Quatérnios	82
A.2	Código para conversão de Matriz 4×4 para Quatérnio	83
A.3	Código para conversão de Quatérnio para Matriz 4×4	85
A.4	Código para conversão de Ângulos de Euler para Quatérnio	87
A.5	Código para a Curva Slerp	88
	Referências Bibliográficas	90

Lista de Figuras

1.1	Animação de uma letra “K” 3D	1
2.1	Rotação no plano	5
2.2	Argumento de um número complexo z	7
2.3	Ângulos de Euler	11
3.1	Rotação em \mathbb{R}^3	32
3.2	Rotação em \mathbb{R}^3	32
3.3	Os Quatérnios q e q^{-1}	35
4.1	Comparação entre as curvas de interpolação <i>Lerp</i> e <i>Slerp</i>	45
4.2	Exemplo 1: Uma interpolação com o Slerp3d	52
4.3	Exemplo 2: Uma interpolação com o Slerp3d	53
4.4	Exemplo 3: Uma interpolação com o Slerp3d	54
5.1	Grande Esfera em S^3	58
5.2	Interseção de S^2 com L^2	61
5.3	A transformação \hat{T}	62
5.4	Polinomial quadrática	69
5.5	Polinomial cúbica	69
5.6	Combinação de Curvas Circulares em S^3	74

Agradecimentos

- Ao Prof^o. Dr. Lenimar pela orientação e pelo excelente tema de trabalho escolhido.
- Ao amigo e professor J.B. Parente, pela permissão em usar sua sala e computador, sem isto não teria sido possível as implementações feitas neste trabalho e nem a pesquisa pela internet que foi crucial. Agradeço também por acreditar sempre na minha capacidade de chegar ao fim deste trabalho.
- Ao amigo Juan Carlos, pelo ombro amigo nas horas difíceis. Nossas conversas sempre foram muito motivantes.
- A todos os colegas do curso de mestrado do DM-UFPB, que me deram força.
- Ao professor Andrade pelos conselhos e por seu comportamento de pai para comigo.
- Ao meu grande amigo e professor Valdek por tudo que me fez, tanto no curso de mestrado como na graduação. Sua ajuda foi indispensável, sem ela talvez não tivesse chegado onde estou.
- À CAPES pelo suporte financeiro.
- À minha mãe, meu pai e meus irmãos, pela educação, pela insistência que me deram e, o mais importante, por nunca duvidarem da minha capacidade.

- À minha esposa, por ter suportado o meu mau humor durante todo este trabalho e mesmo assim continuar dando a força que foi tão importante.
- A Deus, por tudo.

Edson Leite Araújo
João Pessoa, Paraíba
31 de Dezembro de 2000

Resumo

Este trabalho apresenta um método de interpolar suavemente uma dada seqüência de orientações sólidas de um objeto 3d, usando combinação de curvas quatérnias circulares. Dadas três orientações, é construída uma curva circular quatérnia que interpola as três orientações. Assim, dadas quatro orientações q_{i-1}, q_i, q_{i+1} e q_{i+2} , existem duas curvas circulares quatérnias C_i e C_{i+1} que interpolam as 3-uplas quatérnias (q_{i-1}, q_i, q_{i+1}) e (q_i, q_{i+1}, q_{i+2}) , respectivamente; Assim, ambas C_i e C_{i+1} interpolam as duas orientações q_i e q_{i+1} .

Geramos uma curva quatérnia $Q_i(t)$ que interpola as duas orientações q_i e q_{i+1} enquanto combina suavemente as duas curvas circulares quatérnias $C_i(t)$ e $C_{i+1}(t)$ com uma função de combinação $f(t) \in C^k(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ com $k \in \mathbb{R}$. A curva quatérnia Q_i tem as mesmas derivadas, até a ordem k , que C_i em q_i e que C_{i+1} em q_{i+1} , respectivamente. Conectando os segmentos de curva Q_i em uma seqüência, geramos uma curva quatérnia C^k -contínua que interpola suavemente uma dada seqüência de orientações sólidas.

Abstract

This paper presents a method to smoothly interpolate a given sequence of solid orientations using circular blending quaternion curves. Given three solid orientations, a circular quaternion curve is constructed that interpolates the three orientations. Therefore, given four orientations $q_{i-1}, q_i, q_{i+1}, q_{i+2}$, there are two circular quaternion curves C_i and C_{i+1} which interpolate the triples of orientations (q_{i-1}, q_i, q_{i+1}) and (q_i, q_{i+1}, q_{i+2}) , respectively; thus, both C_i and C_{i+1} interpolate the two orientations q_i e q_{i+1} .

We generate a quaternion curve $Q_i(t)$ which interpolates the two orientations q_i and q_{i+1} while smoothly blending the two circular quaternion curves $C_i(t)$ e $C_{i+1}(t)$ with a blending function $f(t) \in C^k(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ with $k \in \mathbb{R}$. The quaternion curve Q_i has the same derivatives, up order k , with C_i at q_i and with C_{i+1} at q_{i+1} , respectively. By connecting the quaternion curves segments Q_i 's in a connected sequence, we generate a C^k -continuous quaternion path which smoothly interpolates a given sequence of solid orientations.

Capítulo 1

Introdução

Um dos problemas fundamentais em animação através da computação gráfica é:

“Como interpolar uma dada seqüência de posições e orientações¹ de um corpo rígido, de modo que o movimento resultante pareça suave e natural?”

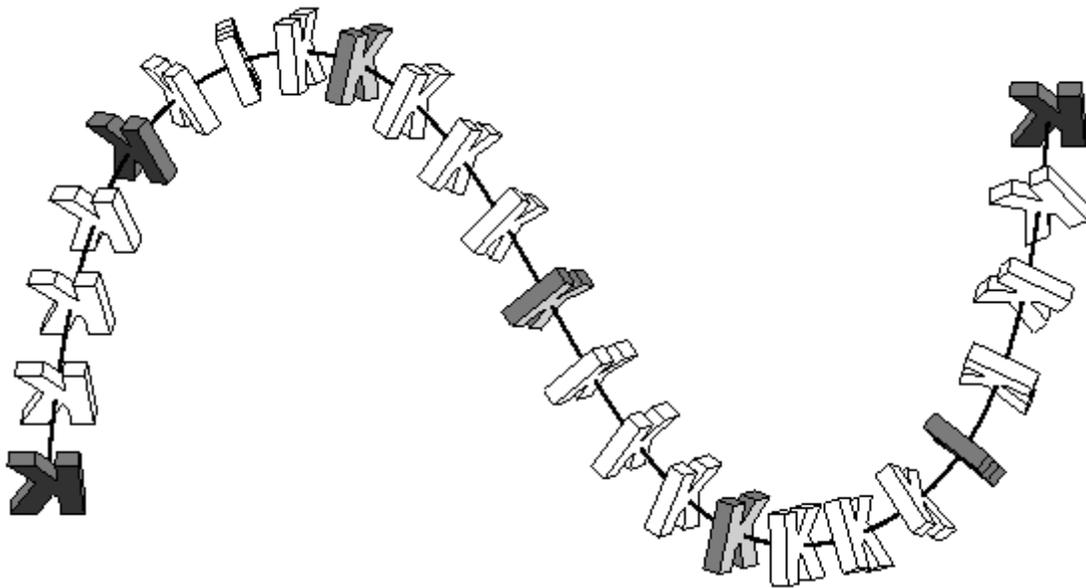


Figura 1.1: Animação de uma letra “K” 3D

¹Chamaremos o par posição-orientação definido pelo problema, de *keyframe*, os pares gerados como solução do problema de *frames interpolantes* e um par qualquer simplesmente *frame*.

Para um corpo rígido tridimensional, sua posição e orientação podem ser representadas de forma única por dois elementos: $p \in \mathbb{R}^3$ e $q \in SO(3)$, respectivamente, onde $SO(3)$ é o grupo das rotações em \mathbb{R}^3 (veja [3]). Portanto, o movimento de um corpo rígido 3D pode ser representado de maneira única como um caminho no espaço $\mathbb{R}^3 \times SO(3)$.

Dada uma seqüência de pares posição orientação $(p_i, q_i) \in \mathbb{R}^3 \times SO(3)$, $i = 1, \dots, n$, o problema de obter o movimento de um corpo rígido é como controlar a forma e a velocidade de um caminho suave

$$(p(t), q(t)) \in \mathbb{R}^3 \times SO(3),$$

enquanto se interpola a dada seqüência de n pontos discretos (p_i, q_i) . O controle da velocidade é feito especificando uma seqüência $\{t_i\} \subset \mathbb{R}$ de instantes estritamente crescente, de modo que o caminho $(p(t), q(t))$ interpola cada *keyframe* (p_i, q_i) no instante t_i , isto é,

$$\begin{aligned} p(t_i) &= p_i; \\ q(t_i) &= q_i. \end{aligned}$$

Entre duas *keyframes* adjacentes, digamos nos instantes t_i e t_{i+1} , o ideal é que um total de

$$\frac{t_{i+1} - t_i}{h} - 1$$

frames interpolantes sejam geradas, nos instantes

$$t = t_i + h, t_i + 2h, \dots, t_{i+1} - h$$

onde $h = \frac{1}{24}$ segundos para o cinema e $h = \frac{1}{30}$ segundos para vídeos. Em outras palavras, para produzir animações para o cinema o ideal é que sejam geradas 24 *frames* por segundo e para o vídeo 30 *frames* por segundo.

Como existem muitas técnicas bem conhecidas para a construção da primeira componente $p(t) \in \mathbb{R}^3$, nosso trabalho concentra-se na segunda componente $q(t) \in SO(3)$, o qual veremos ser não-euclidiano.

Também existem várias soluções para a segunda componente, embora não tão conhecidas. O que nosso trabalho traz de inovação é o uso dos *quatérnios* para re-presentar rotações em \mathbb{R}^3 , mostrando como principal vantagem o fato de se usar poucas operações aritméticas nas operações entre quatérnios, o que minimiza bastante o tempo usado pelo computador para produzir uma animação. Fato que é relevante quando comparado às outras ferramentas usadas com mais freqüência: *matrizes de rotação* e *ângulos de Euler*.

O resto deste trabalho é organizado como segue. No capítulo 1, mostramos as formas de se realizar rotações em \mathbb{R}^3 , usando as rotações em \mathbb{R}^2 como motivação inicial. No capítulo 2, damos um tratamento completo sobre os quatérnios e mostramos sua íntima relação com as rotações em \mathbb{R}^3 . Prosseguimos no capítulo 3 com alguns métodos de interpolação entre duas rotações, dando ênfase à função *Slerp* que usa os quatérnios e que nos será útil no capítulo 4.

Finalmente, no capítulo 4 mostramos o resultado principal deste trabalho.

No apêndice A, encontram-se alguns algoritmos dos métodos discutidos no decorrer desta dissertação, escritos em *linguagem C*. Algumas imagens presentes neste trabalho foram produzidas pelas implementações destes algoritmos e tais implementações, códigos fonte e executáveis, estão disponíveis para download na internet², incluindo também o programa que mostra o resultado principal deste trabalho.

²<ftp://mat.ufpb.br/pub/mat/quat2000.zip>

Capítulo 2

rotações

O espaço das rotações assume papel relevante em Computação Gráfica, devido à importância dos movimentos rígidos. Como exemplo, o movimento de um corpo rígido fica completamente determinado se é dada a seqüência de pares: posição (translação) e orientação (rotação) que o objeto descreve em relação a um sistema de coordenadas.

Neste capítulo estudaremos as rotações de uma maneira geral e analisaremos quais as melhores formas de representá-las. Veremos no próximo capítulo outra forma de representar as rotações em \mathbb{R}^3 .

2.1 Rotações no Plano

Como motivação, iniciaremos nosso estudo com as rotações em \mathbb{R}^2 . Veremos quais as possibilidades de representação e uma comparação entre elas.

Seja $\mathbf{v} = (x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$ e $\theta \in [0, \pi]$, deduziremos qual a expressão para a rotação $R_\theta(\mathbf{v})$ do vetor \mathbf{v} de um ângulo θ no sentido anti-horário.

Pela figura 2.1, temos que:

$$\begin{aligned}x_1 &= r_1 \cos \alpha \\y_1 &= r_1 \sin \alpha\end{aligned}\tag{2.1}$$

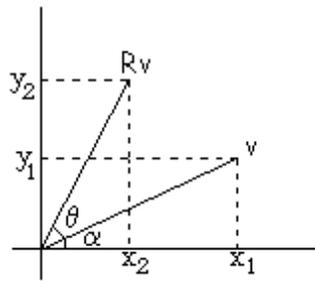


Figura 2.1: Rotação no plano

e

$$\begin{aligned} x_2 &= r_2 \cos(\alpha + \theta) \\ y_2 &= r_2 \sin(\alpha + \theta) \end{aligned} \tag{2.2}$$

onde $r_1 = |\mathbf{v}|$, $r_2 = |R_\theta(\mathbf{v})|$, e α é o ângulo entre \mathbf{v} e o eixo x . Como uma rotação preserva comprimentos, temos que $r_1 = r_2$. Logo, desenvolvendo as expressões em 2.2 e usando isto juntamente com 2.1, temos:

$$\begin{aligned} x_2 &= r_2 \cos \alpha \cos \theta - r_2 \sin \alpha \sin \theta \\ &= r_1 \cos \alpha \cos \theta - r_1 \sin \alpha \sin \theta \\ &= x_1 \cos \theta - y_1 \sin \theta; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_2 &= r_2 \sin \alpha \cos \theta + r_2 \cos \alpha \sin \theta \\ &= r_1 \sin \alpha \cos \theta + r_1 \cos \alpha \sin \theta \\ &= y_1 \cos \theta + x_1 \sin \theta; \end{aligned}$$

Assim, segue-se que a expressão procurada é dada por

$$R_\theta(x_1, y_1) = (x_1 \cos \theta - y_1 \sin \theta, y_1 \cos \theta + x_1 \sin \theta); \tag{2.3}$$

2.1.1 Notação Matricial

Podemos obter uma representação matricial para 2.3, observe que

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\text{sen}\theta \\ \text{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$$

Se denotarmos $\mathbf{v} = (x_1, y_1)$ e $R_\theta(\mathbf{v}) = (x_2, y_2)$ por

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} \quad e \quad R_\theta(\mathbf{v}) = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

e por A a matriz

$$A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\text{sen}\theta \\ \text{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

a expressão 2.3 tem sua representação matricial da seguinte forma:

$$R_\theta(\mathbf{v}) = A\mathbf{v}$$

Neste contexto a matriz A é chamada “matriz de rotação” ou, algumas vezes “operador rotação”. Tais matrizes desempenham um papel importante no estudo das rotações planas.

Notação 2.1.1. O conjunto das matrizes¹ de rotação no plano é denotado por $SO(2)$.

2.1.2 Notação Complexa

Relembremos algumas definições:

Definição 2.1.1. Seja $z = a + bi \in \mathbb{C}$. A norma de z , denotada por $|z|$, é dada por $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Geometricamente, a norma de z representa o comprimento do vetor $(a, b) \in \mathbb{R}^2$

¹ $SO(2)$: *Special Orthogonal matrices* 2×2 .

Definição 2.1.2. Seja $z = a + bi \in \mathbb{C}$. O argumento de z é dado por $\theta = \arctg(\frac{b}{a})$.

Da mesma forma, o argumento θ de z representa o ângulo entre o vetor $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ e o eixo x . Observe a figura 2.2

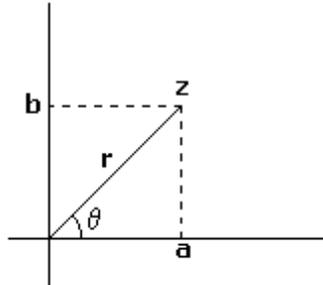


Figura 2.2: Argumento de um número complexo z

Pela figura temos que

$$a = r \cos \theta$$

$$b = r \operatorname{sen} \theta$$

onde $r = |z|$. Substituindo em z , temos

$$z = r(\cos \theta + \operatorname{sen} \theta \mathbf{i}),$$

esta nova expressão para o complexo z , é chamada *forma polar* ou *forma trigonométrica*.

Sejam $z = r(\cos \theta + \operatorname{sen} \theta \mathbf{i})$, $w = x_1 + y_1 \mathbf{i} \in \mathbb{C}$. Usando a regra de multiplicação de números complexos, segue-se que

$$\begin{aligned} zw &= r(\cos \theta + \operatorname{sen} \theta \mathbf{i})(x_1 + y_1 \mathbf{i}) \\ &= r[(x_1 \cos \theta - y_1 \operatorname{sen} \theta) + (y_1 \cos \theta + x_1 \operatorname{sen} \theta) \mathbf{i}] \end{aligned}$$

Fazendo a identificação de um número complexo arbitrário $x + y \mathbf{i}$ com o vetor do plano (x, y) e supondo que $zw = x_2 + y_2 \mathbf{i}$, podemos reescrever a expressão acima da seguinte maneira:

$$(x_2, y_2) = r(x_1 \cos \theta - y_1 \operatorname{sen} \theta, y_1 \cos \theta + x_1 \operatorname{sen} \theta)$$

e comparando esta expressão com 2.3, percebe-se que zw representa uma rotação de um ângulo θ no sentido anti-horário seguida por uma mudança de escala r . Assim, se supormos que o complexo z seja unitário, ou seja $r = 1$, temos que zw é uma rotação no plano, e reescrevemos em notação complexa a rotação e o escalamento como

$$R_\theta(w) = zw$$

Concluimos então que o conjunto do números complexos unitários podem ser identificados com o conjunto de todas as rotações no plano ², ou seja $S^1 \simeq SO(2)$.

2.1.3 Matrizes ou Números Complexos?

Inicialmente, ressaltamos a vantagem de menor armazenamento no computador que a notação complexa tem, pois são necessárias apenas *duas* coordenadas para armazená-lo, enquanto que uma matriz necessita de *quatro* coordenadas.

Quando lidamos com rotações é necessário trabalhar com composições de rotações. Isto significa matematicamente multiplicação de matrizes ou de números complexos dependendo de qual representação estejamos usando. Para multiplicarmos duas matrizes 2×2 são necessários *oito produtos* e *quatro adições*, enquanto que para multiplicarmos dois números complexos são necessários apenas *quatro produtos* e *4 adições*.

Dadas estas comparações é fácil perceber que computacionalmente a representação complexa é mais vantajosa para lidar com rotações.

2.2 Rotações em \mathbb{R}^3

Nesta seção investigaremos as formas de se expressar rotações em \mathbb{R}^3 .

²Usamos novamente a identificação de um complexo com um vetor do plano para concluir este isomorfismo.

2.2.1 Rotações Usando Matrizes

Começaremos relembrando algumas definições e resultados de álgebra linear.

Definição 2.2.1. *Um operador linear $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é dito ortogonal quando $T^t = T^{-1}$, onde T^t denota a transformação adjunta de T .*

Usando uma linguagem “matricial” podemos dizer que um operador T é ortogonal quando sua matriz associada $[T]$ obedece à seguinte relação

$$[T]^t = [T^{-1}] = [T]^{-1}.$$

onde $[T]^t$ significa a matriz transposta de T .

De agora em diante usaremos apenas a letra do operador para representar a sua matriz associada, ou seja, a matriz do operador $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é T , e a matriz de um operador ortogonal também será chamada *ortogonal*. O conjunto das matrizes ortogonais de ordem 3×3 é chamado $O(3)$.

Usando a definição 2.2.1 podemos deduzir a seguinte proposição:

Proposição 2.2.1. *Seja $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ um operador ortogonal, então $\det T = \pm 1$.*

Demonstração:

$$\begin{aligned} T \cdot T^{-1} &= I && \Rightarrow \\ T \cdot T^t &= I && \Rightarrow \\ \det(T \cdot T^t) &= \det(I) && \Rightarrow \\ \det(T) \det(T^t) &= 1 && \Rightarrow \\ \det(T) \det(T) &= 1 && \Rightarrow \\ \det^2(T) &= 1 && \Rightarrow \\ \det(T) &= \pm 1 \end{aligned}$$

■

As matrizes que têm determinante igual a 1 são chamadas *matrizes especiais* e o conjunto formado por estas matrizes é denotado por³ S .

³ S de especial em inglês: *special*.

Definição 2.2.2. *Seja $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ um operador linear. O operador T é dito positivo quando $\det(T) \geq 0$.*

Indicaremos o conjunto das matrizes ortogonais positivas por $SO(3)^4$, ou seja, as matrizes com determinante igual a 1.

A seguir enunciamos um importante teorema que está intimamente relacionado à teoria das rotações em \mathbb{R}^3 . Sua demonstração será omitida, podendo ser encontrada em [4], em toda sua generalização.

Teorema 2.2.2. *Se $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é um operador ortogonal positivo, existe uma base ortonormal de \mathbb{R}^3 , na qual a matriz de T é da forma*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\text{sen}\theta \\ 0 & \text{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

onde $\theta \in [-\pi, \pi]$.

Este teorema nos afirma que os operadores ortogonais positivos representam rotações em torno do primeiro vetor de alguma base ortonormal de \mathbb{R}^3 , isto nos leva a concluir que

Corolário 2.2.3. *O conjunto $SO(3)$ representa o conjunto de todas as rotações espaciais.*

2.2.2 Rotações Usando Ângulos de Euler

Uma outra alternativa para representar rotações são os *ângulos de Euler*. A parametrização de $SO(3)$ por ângulos de Euler utiliza o fato de que qualquer rotação pode ser obtida utilizando três rotações sucessivas em torno dos eixos coordenados.

⁴ $SO(3)$: *special orthogonal* 3×3

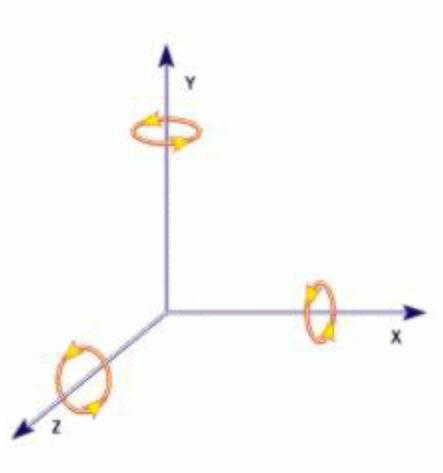


Figura 2.3: Ângulos de Euler

Definição 2.2.3. Chamamos ângulos de Euler os ângulos ϕ , θ e ψ onde suas respectivas rotações são dadas por

$$R_\phi = \begin{pmatrix} \cos\phi & \text{sen}\phi & 0 \\ -\text{sen}\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad R_\theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \text{sen}\theta \\ 0 & -\text{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix},$$

$$R_\psi = \begin{pmatrix} \cos\psi & 0 & \text{sen}\psi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\text{sen}\psi & 0 & \cos\psi \end{pmatrix}$$

onde $\phi, \theta, \psi \in [-\pi, \pi]$. e representam rotações em torno dos eixos x , y , z , respectivamente.

Esta representação é muito eficiente pois ela usa somente três variáveis (ϕ , θ e ψ) para representar uma rotação. Entretanto, não existe uma maneira fácil de decompor uma rotação arbitrária como uma série de três rotações em torno dos eixos coordenados.

Ângulos de Euler também introduzem o problema chamado “*gimbal lock*”, que representa a perda de um grau de liberdade rotacional. Este problema surge quando

algum dos ângulos de Euler é de 90 graus. Repentinamente a rotação não ocorre, devido ao alinhamento dos eixos.

Por exemplo, imagine uma seqüência de rotações a serem realizadas por um simulador de vôo. Você especifica que primeira rotação deve ser de um ângulo α em torno do eixo x , a segunda rotação é de 90 graus em torno do eixo y , e β deve ser a rotação em torno do eixo z . Realizando estas rotações você descobrirá que a rotação de β em torno eixo z tem o mesmo efeito que uma rotação em torno do eixo x . A rotação em torno do eixo y causou um alinhamento entre os eixos x e z , causando assim a perda de um grau de liberdade na rotação.

Matematicamente, o “*gimbal lock*” corresponde a perda de um grau de liberdade na matriz de rotação genérica, que é dada por

$$R(\phi, \theta, \psi) = \begin{bmatrix} \cos\theta\cos\psi & \cos\psi\sin\phi\sin\theta - \cos\phi\sin\psi & \cos\phi\cos\psi\sin\theta + \sin\phi\sin\psi \\ \cos\theta\sin\psi & \cos\phi\cos\psi + \sin\phi\sin\theta\sin\psi & \cos\phi\sin\theta\sin\psi - \cos\psi\sin\phi \\ -\sin\theta & \cos\theta\sin\phi & \cos\phi\cos\theta \end{bmatrix}$$

Considerando o exemplo citado anteriormente, a sua matriz de rotação será a seguinte:

$$\begin{aligned} R(\phi, \frac{\pi}{2}, \psi) &= \begin{bmatrix} 0 & \cos\psi\sin\phi - \cos\phi\sin\psi & \cos\phi\cos\psi + \sin\phi\sin\psi \\ 0 & \cos\phi\cos\psi + \sin\phi\sin\psi & \cos\phi\sin\psi - \cos\psi\sin\phi \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & \text{sen}(\phi - \psi) & \cos(\phi - \psi) \\ 0 & \cos(\phi - \psi) & \text{sen}(\phi - \psi) \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Esta expressão mostra que a rotação $R(\phi, \frac{\pi}{2}, \psi)$ depende somente da diferença $\phi - \psi$ e assim sendo, ela tem somente um grau de liberdade em vez de dois. Para $\theta = \frac{\pi}{2}$, os ângulos ϕ e ψ resultam em rotações em torno do mesmo eixo (ver [1] para mais detalhes).

No capítulo 2 veremos que a melhor representação para as rotações espaciais provem de uma estrutura algébrica chamada “*quatérnios*”.

Capítulo 3

Quatérnios

3.1 Fundamentos Históricos

Os *Quatérnios* foram descobertos por *Sir William Rowan Hamilton* em 1843. O seu objetivo era generalizar os números complexos para três dimensões, isto é, números da forma

$$a + ib + jc,$$

onde $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $i^2 = j^2 = -1$. Hamilton nunca foi bem sucedido em fazer esta generalização, e pouco tempo depois teve a prova de que o conjunto dos números complexos tridimensionais não é fechado sob a multiplicação, ou seja, dados os quatérnios x, y não é verdadeiro que xy também é um quatérnio. Em 1966, *Kenneth O. May* deu uma elegante prova deste fato:

Proposição 3.1.1 (Kenneth O. May). *O conjunto dos números complexos tridimensionais não é fechado sob a multiplicação.*

Demonstração: Assuma que as regras usuais¹ de aritmética para números complexos valham, e que $i^2 = j^2 = -1$.

A prova é feita por contradição, de modo que assumiremos que a multiplicação é fechada. Portanto, existem $a, b, c \in \mathbb{R}$ tais que

$$ij = a + ib + jc \quad (3.1)$$

multiplicando à esquerda (3.1) por i , temos

$$-j = -b + ia + ij c, \quad (3.2)$$

substituindo a eq. (3.1) em (3.2) obtemos

$$\begin{aligned} -j &= -b + ia + (a + ib + jc)c \\ &= (ac - b) + i(a + bc) + c^2 j \end{aligned}$$

Assim, temos que

$$\begin{aligned} ac - b &= 0 \\ a + bc &= 0 \\ c^2 + 1 &= 0 \end{aligned}$$

A equação $c^2 + 1 = 0$ nos dá uma contradição, já que c é real, por hipótese. ■

Uma das motivações de Hamilton para procurar números complexos tridimensionais era encontrar uma descrição de rotações no espaço, análoga aos números complexos, onde uma multiplicação corresponde a uma rotação e uma mudança de escala no plano. Enquanto andava pelo *Royal Canal* em Dublin, numa segunda-feira de Outubro de 1843, Hamilton imaginou que talvez “quatro” números fossem necessários para descrever uma rotação seguida por um aumento de escala. Um número descreve a mudança de escala, outro número descreve o grau a ser girado e os dois últimos números dão o plano em que o vetor deve ser girado. Após este “estalo”, Hamilton

¹distributividade do produto com relação à soma, independência linear de $\{1, i, j\}$ e a associatividade do produto

encontrou uma multiplicação fechada para os números complexos quadri-dimensionais da forma

$$a + ix + jy + kz,$$

onde

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1;$$

$$ij = -ji = k;$$

$$jk = -kj = i;$$

$$ki = -ik = j;$$

Hamilton chamou seus números complexos quadri-dimensionais de *Quatérnios*. Um quatérnio $s + ix + jy + kz$ é usualmente escrito como $[s, \mathbf{v}]$, $s \in \mathbb{R}$, $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$, onde s é chamado *parte escalar* e $\mathbf{v} = (x, y, z)$, *parte vetorial*. Ele apresentou a matemática quaterniônica² em uma série de leituras na *Royal Irish Academy* (veja [7]). As leituras deram origem a um livro intitulado:

“LECTURES ON QUATERNIONS: CONTAINING A SYSTEMATIC
STATEMENT OF A NEW MATHEMATICAL METHOD”

3.2 Matemática Quaterniônica Básica

Nesta seção vamos enunciar a notação usada para quatérnios e estabelecer a matemática quaterniônica, incluindo adição, multiplicação, subtração e multiplicação por escalar. Por fim definimos o conjugado e o inverso de um quatérnio.

Notação 3.2.1. Usaremos o “ \equiv ” para indicar “igual por definição”. O conjunto das funções de A em B , n vezes diferenciáveis com derivadas contínuas será indicado por $C^n(A, B)$.

²ou quaterniônica

Definição 3.2.1. O conjunto dos quatérnios é denotado por \mathbb{H} .

Quatérnios consistem de uma parte escalar $s \in \mathbb{R}$ e uma parte vetorial $\mathbf{v} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Usaremos as seguintes definições:

Definição 3.2.2. Sejam $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $ij = -ji = k$, $jk = -kj = i$, $ki = -ik = j$. Então, dado $q \in \mathbb{H}$, podemos escrever:

$$\begin{aligned} q &\equiv [s, \mathbf{v}], & s \in \mathbb{R}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3 \\ &\equiv [s, (x, y, z)], & s, x, y, z \in \mathbb{R} \\ &\equiv s + ix + jy + kz & s, x, y, z \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Definição 3.2.3. Sejam $q, q' \in \mathbb{H}$, onde $q = [s, (x, y, z)]$ e $q' = [s', (x', y', z')]$. O operador adição $+$, é definido como

$$\begin{aligned} q + q' &\equiv [s, \mathbf{v}] + [s', \mathbf{v}'], \\ &\equiv [s, (x, y, z)] + [s', (x', y', z')], \\ &\equiv (s + ix + jy + kz) + (s' + ix' + jy' + kz') \\ &= (s + s') + i(x + x') + j(y + y') + k(z + z') \end{aligned}$$

Proposição 3.2.1 (Adição Quatérnia). Sejam $q, q' \in \mathbb{H}$, onde $q = [s, \mathbf{v}]$ e $q' = [s', \mathbf{v}']$. Então $q + q' = [s + s', \mathbf{v} + \mathbf{v}']$.

Demonstração:

$$\begin{aligned} q + q' &\equiv [s, \mathbf{v}] + [s', \mathbf{v}'] \\ &\equiv (s + ix + jy + kz) + (s' + ix' + jy' + kz') \\ &= (s + s') + i(x + x') + j(y + y') + k(z + z') \\ &\equiv [s + s', \mathbf{v} + \mathbf{v}'] \end{aligned}$$

■

Definição 3.2.4. *Sejam $q, q' \in \mathbb{H}$, onde $q = s + ix + jy + kz$ e $q' = s' + ix' + jy' + kz'$.*

A operação multiplicação é definida por

$$\begin{aligned} qq' &\equiv [s, \mathbf{v}][s', \mathbf{v}'], \\ &\equiv [s, (x, y, z)][s', (x', y', z')], \\ &\equiv (s + ix + jy + kz)(s' + ix' + jy' + kz') \\ &= ss' - (xx' + yy' + zz') + i(sx' + s'x + yz' - zy') + \\ &\quad + j(sy' + s'y + zx' - xz') + k(sz' + s'z + xy' - yx') \end{aligned}$$

Proposição 3.2.2 (Multiplicação Quatérnia). *Sejam $q, q' \in \mathbb{H}$, onde $q = [s, \mathbf{v}]$ e $q' = [s', \mathbf{v}']$. Então*

$$qq' = [ss' - \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}', \mathbf{v} \times \mathbf{v}' + s\mathbf{v}' + s'\mathbf{v}],$$

onde “ \cdot ” e “ \times ” denotam o produto interno e vetorial em \mathbb{R}^3 , respectivamente.

Demonstração: Pela definição 3.2.2, as seguintes identidades são válidas: $jk = -kj = i$, $ki = -ik = j$, $ij = -ji = k$. Usando-as temos:

$$\begin{aligned} qq' &\equiv [s, \mathbf{v}][s', \mathbf{v}'] \\ &\equiv (s + ix + jy + kz)(s' + ix' + jy' + kz') \\ &= ss' - (xx' + yy' + zz') + i(sx' + s'x + yz' - zy') + \\ &\quad + j(sy' + s'y + zx' - xz') + k(sz' + s'z + xy' - yx') \\ &= (ss' - \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}') + i(yz' - zy') + j(zx' - xz') + k(xy' - yx') + \\ &\quad + s(ix' + jy' + kz') + s'(ix + jy + kz) \\ &= [ss' - \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}', \mathbf{v} \times \mathbf{v}' + s\mathbf{v}' + s'\mathbf{v}] \end{aligned}$$

■

Corolário 3.2.3. *A multiplicação quatérnia geralmente não é comutativa.*

Demonstração: Esta prova é feita por meio de um contra-exemplo, $ij = k$, mas $ji = -k$.

■

Abaixo daremos algumas proposições sem prová-las. As provas são todas baseadas no princípio usado anteriormente: os quatérnios envolvidos são escritos na forma $s + ix + jy + kz$. Então, usando álgebra simples e agrupando termos semelhantes, o resultado pode ser escrito como um quatérnio usando a definição 3.2.

Proposição 3.2.4. *Sejam $p, q, q' \in \mathbb{H}$ e $r \in \mathbb{R}$. Então*

$$\begin{aligned} (pq)q' &= p(qq') && \text{(a multiplicação quatérnia é associativa)} \\ p(q + q') &= pq + pq' && \text{(a multiplicação quatérnia é distributiva)} \\ (q + q')p &= qp + q'p \end{aligned}$$

A multiplicação por um escalar é facilmente introduzida, identificando $r \in \mathbb{R}$ com o quatérnio $[r, \mathbf{0}]$:

Definição 3.2.5. *Sejam $q \in \mathbb{H}$ e $r \in \mathbb{R}$. A multiplicação por escalar é definida por $rq \equiv [r, \mathbf{0}]q$.*

Proposição 3.2.5 (Multiplicação por Escalar). *Sejam $q \in \mathbb{H}$, onde $q = [s, \mathbf{v}]$, e $r \in \mathbb{R}$. Então:*

$$\begin{aligned} rq &= qr \\ &= [r, \mathbf{0}][s, \mathbf{v}] \\ &= [rs, r\mathbf{v}] \end{aligned}$$

Note que a proposição nos diz que a multiplicação por escalar é comutativa. Usaremos a notação $\frac{q}{r}$ para indicar $\frac{1}{r}q$, onde $q \in \mathbb{H}$ e $r \in \mathbb{R}$. Agora, podemos introduzir a subtração quatérnia na maneira usual,

Definição 3.2.6. *Dados $q, q' \in \mathbb{H}$, a subtração quatérnia é definida por $q - q' = q + (-1)q'$.*

Esta definição nos dá o que realmente esperávamos:

Proposição 3.2.6 (Subtração Quatérnia). *Sejam $q, q' \in \mathbb{H}$, onde $q = [s, \mathbf{v}]$ e $q' = [s', \mathbf{v}']$. Então*

$$\begin{aligned} q - q' &\equiv q + (-1)q' \\ &= [s - s', \mathbf{v} - \mathbf{v}'] \end{aligned}$$

Analogamente à definição de conjugado de um número complexo, definimos o conjugado de um quatérnio:

Definição 3.2.7. *Seja $q \in \mathbb{H}$. Então q^* é chamado o conjugado de q e é dado por $q^* \equiv [s, \mathbf{v}]^* \equiv [s, -\mathbf{v}]$.*

Esta definição dá origem às seguintes propriedades, cujas demonstrações são conseqüências imediatas das definições anteriores:

Proposição 3.2.7. *Sejam $p, q \in \mathbb{H}$. Então:*

- i) $(q^*)^* = q$;*
- ii) $(pq)^* = q^*p^*$;*
- iii) $(p + q)^* = p^* + q^*$;*
- iv) $qq^* = q^*q \in \mathbb{R}$.*

A norma de um quatérnio é obtida usando conjugação:

Definição 3.2.8. *Seja $p \in \mathbb{H}$ e seja a aplicação $\|\cdot\| : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $\|q\| \equiv \sqrt{qq^*}$. Esta aplicação é chamada norma e $\|q\|$ é a norma de q .*

A aplicação norma tem um grande número de propriedades interessantes, que serão resumidas a seguir.

Proposição 3.2.8. *Sejam $q, q' \in \mathbb{H}$ e $\|\cdot\| : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}$ a aplicação norma. As seguintes equações são válidas:*

$$\text{i) } \|q\| = \sqrt{s^2 + \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} = \sqrt{s^2 + x^2 + y^2 + z^2};$$

$$\text{ii) } \|q^*\| = \|q\|$$

$$\text{iii) } \|qq'\| = \|q\| \|q'\|$$

Demonstração: As equações (i) e (ii) podem ser vistas diretamente. A equação (iii) segue de:

$$\begin{aligned} \|qq'\| &= \sqrt{qq'(qq')^*} \\ &= \sqrt{qq'q'^*q^*} \\ &= \sqrt{q \|q'\|^2 q^*} \\ &= \sqrt{qq^* \|q'\|^2} \\ &= \sqrt{\|q\|^2 \|q'\|^2} \\ &= \|q\| \|q'\| \end{aligned}$$

■

Posteriormente, necessitaremos do produto interno de dois quatérnios. Também queremos mostrar que a aplicação norma é de fato uma norma do sentido matemático usual. Da equação (i) na proposição 3.2.8 segue-se que a norma de um quatérnio q pode ser escrita como geralmente é obtido através do produto interno (se $q \in \mathbb{H}$ é identificado com o vetor correspondente em \mathbb{R}^4). Esta propriedade é formalizada por:

Definição 3.2.9. *Sejam $q, q' \in \mathbb{H}$, $q = [s, \mathbf{v}] = [s, (x, y, z)]$, $q' = [s', \mathbf{v}'] = [s', (x', y', z')]$.*

O produto interno é definido como $\cdot : \mathbb{H} \times \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}$ onde

$$\begin{aligned} q \cdot q' &= ss' + \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}'; \\ &= ss' + xx' + yy' + zz'. \end{aligned}$$

Note que esta definição dá origem a:

Corolário 3.2.9. *A norma de um quatérnio pode ser obtida por $\|q\| = \sqrt{q \cdot q}$. Além disso, $\|\cdot\|$ é uma norma no sentido matemático usual³.*

³Com isto, queremos dizer que a norma de um quatérnio definida desta forma satisfaz à todas as condições impostas na definição matemática de “norma” de um vetor

Demonstração: Segue-se de proposição 3.2.8, eq. (i), que $q \cdot q = \|q\|^2$. Seja $q = [s, (x, y, z)] \in \mathbb{H}$, se identificarmos q com $(s, x, y, z) \in \mathbb{R}^4$, o método de calcular norma acima, é idêntico ao da norma euclidiana em \mathbb{R}^4 . Assim a norma quatérnia é uma norma no sentido usual. ■

Posteriormente necessitaremos da seguinte generalização dos casos bi e tridimensionais:

Definição 3.2.10. *Sejam $q, q' \in \mathbb{H}$. Defina q, q' como os vetores quadri-dimensionais correspondentes e α como o ângulo entre q, q' . Então*

$$q \cdot q' = \|q\| \|q'\| \cos \alpha.$$

3.3 Propriedades Algébricas dos Quatérnios

Nesta seção provaremos que o conjunto dos quatérnios $\mathbb{H} \setminus \{[0, (0, 0, 0)]\}$ é um grupo não-abeliano sob a multiplicação quatérnia. No final desta seção daremos um sumário de algumas outras propriedades algébricas dos quatérnios.

Definição 3.3.1. *O conjunto dos quatérnios $\mathbb{H} \setminus \{[0, (0, 0, 0)]\}$ será denotado por $\overset{\circ}{\mathbb{H}}$.*

Basearemos nossa discussão na definição de grupo:

Definição 3.3.2. *Seja G um conjunto com um operador $\cdot : G \times G \rightarrow G$ definido por*

$(a, b) \mapsto a \cdot b \equiv ab$. G é um grupo se

- i)* $a(bc) = (ab)c, \forall a, b, c \in G$ (O operador é associativo)
- ii)* Existe exatamente um $I \in G$ (I é o elemento neutro)
tal que $Ia = aI = a, \forall a \in G$
- iii)* $\forall a \in G$ existe um elemento (a⁻¹ é o elemento inverso de a)
 $a^{-1} \in G$ tal que $aa^{-1} = a^{-1}a = I$

Se $ab = ba, \forall a, b \in G$, G é chamado um grupo abeliano ou comutativo.

É mostrado nos dois lemas a seguir, que existe um elemento neutro e um elemento inverso em $\mathring{\mathbb{H}}$ com relação à multiplicação quatérnia.

Lema 3.3.1. O elemento $I = [1, \mathbf{0}] \in \mathring{\mathbb{H}}$ é o único elemento neutro sob a multiplicação quatérnia.

Demonstração: Seja $q = [s, \mathbf{v}] \in \mathring{\mathbb{H}}$. Pela proposição 3.2.5 temos $qI = Iq = [1s, 1\mathbf{v}] = [s, \mathbf{v}] = q$. Assim I é um elemento neutro. Para provar que I é único, suponha que exista outro elemento neutro J . Então temos que $IJ = I$, pois J é um elemento neutro. Além disso $IJ = J$, pois I é um elemento neutro. Isto nos dá que $I = IJ = J$, ou seja $I = J$, c.q.d. ■

Lema 3.3.2. Seja $q \in \mathring{\mathbb{H}}$. Então existe $q^{-1} \in \mathring{\mathbb{H}}$ tal que $qq^{-1} = q^{-1}q = I$. Além disso q^{-1} é único e é dado por

$$q^{-1} = \frac{q^*}{\|q\|^2}$$

Demonstração: Considere $q \in \mathring{\mathbb{H}}$.

Unicidade: Considere $p_1, p_2 \in \mathring{\mathbb{H}}$ sendo ambos inversos de q . Segue-se que

$$p_1 = p_1I = p_1(qp_2) = (p_1q)p_2 = Ip_2 = p_2;$$

Existência: Seja $p = \frac{q^*}{\|q\|^2}$. Então:

$$qp = q \frac{q^*}{\|q\|^2} = \frac{qq^*}{\|q\|^2} = \frac{\|q\|^2}{\|q\|^2} = 1 \equiv I,$$

$$pq = \frac{q^*}{\|q\|^2} q = \frac{q^*q}{\|q\|^2} = \frac{\|q\|^2}{\|q\|^2} = 1 \equiv I.$$

Portanto, todo quatérnio em $\mathring{\mathbb{H}}$ possui um inverso. ■

Proposição 3.3.3. *O conjunto $\mathring{\mathbb{H}}$ é um grupo não-abeliano sob a multiplicação quatérnia.*

Demonstração: Note que o conjunto dos quatérnios é fechado sob a multiplicação. Isto segue diretamente da definição de Hamilton. A primeira condição para ser um grupo segue da proposição 3.2.4. A segunda e a terceira condições seguem dos lemas 3.3.1 e 3.3.2. O grupo não é abeliano, pois a multiplicação quatérnia não é comutativa. ■

O conjunto dos quatérnios satisfaz algumas outras propriedades algébricas que merecem ser mencionadas. Estas são brevemente mencionadas a seguir:

- O conjunto dos quatérnios é um grupo abeliano $(\mathbb{H}, +)$ sob a adição quatérnia.
- O conjunto dos quatérnios é um anel de divisão não-abeliano $(\mathbb{H}, +, \cdot)$, onde “+” e “ \cdot ” são a adição e multiplicação quatérnia.

3.4 Quatérnios Unitários

Nesta seção discutiremos sobre um subconjunto do grupo quatérnio — o conjunto dos quatérnios unitários.

Definição 3.4.1. *Seja $q \in \mathbb{H}$. Se $\|q\| = 1$, então q é chamado de quatérnio unitário. Usaremos \mathbb{H}_1 para denotar o conjunto dos quatérnios unitários.*

O conjunto dos quatérnios unitários constituem uma esfera no espaço quadri-dimensional. Devemos ver em breve que os quatérnios unitários guardam uma importante relação com as rotações em geral. Seguem abaixo proposições que conduzem para esse importante resultado.

Proposição 3.4.1. *Seja $q = [s, \mathbf{v}] \in \mathbb{H}_1$. Então existe $\mathbf{v}' \in \mathbb{R}^3$, $|\mathbf{v}'| = 1$, e $\theta \in]-\pi, \pi]$ tal que*

$$q = [\cos\theta, \mathbf{v}'\text{sen}\theta].$$

Demonstração: Se $q = [1, \mathbf{0}]$, considere $\theta = 0$ e \mathbf{v}' pode ser escolhido livremente entre os vetores unitários em \mathbb{R}^3 .

Se $q \neq [1, \mathbf{0}]$, considere $k = |\mathbf{v}|$ e $\mathbf{v}' = \frac{1}{k}\mathbf{v}$. Então $\mathbf{v} = k\mathbf{v}'$, onde \mathbf{v}' é um vetor unitário em \mathbb{R}^3 . Como q é unitário por hipótese temos

$$1 = \|q\|^2 = s^2 + \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = s^2 + k^2\mathbf{v}' \cdot \mathbf{v}' = s^2 + k^2.$$

A equação $s^2 + k^2 = 1$ descreve um círculo unitário no plano. Como o círculo unitário também pode ser descrito por $\cos^2\theta + \text{sen}^2\theta = 1$, então existe $\theta \in]-\pi, \pi]$ tal que $s = \cos\theta$ e $k = \text{sen}\theta$. Assim, obtemos

$$q = [s, \mathbf{v}] = [s, \mathbf{v}'k] = [\cos\theta, \mathbf{v}'\text{sen}\theta]$$

■

Proposição 3.4.2. *Sejam $q, q' \in \mathbb{H}_1$. São válidas as duas equações que seguem:*

i) $\|qq'\| = 1$;

ii) $q^{-1} = q^*$.

Demonstração:

i) $\|qq'\| = \|q\| \|q'\| = 1$, pois $\|q\| = \|q'\| = 1$ e pela eq. (iii) da proposição 3.2.8.

ii) $q^{-1} = \frac{q^*}{\|q\|^2} = q^*$, pois $\|q\| = 1$. ■

O conjunto dos quatérnios \mathbb{H}_1 é obviamente um subconjunto de $\overset{\circ}{\mathbb{H}}$, junto com a definição e a proposição que seguem, provaremos que \mathbb{H}_1 é um subgrupo de $\overset{\circ}{\mathbb{H}}$

Definição 3.4.2. *Seja G um grupo e $F \neq \emptyset$ um subconjunto de G . F é um subgrupo de G se*

i) *Para todo $a, b \in F$, $ab \in F$ (F é fechado);*

ii) *Para todo $a \in F$, $a^{-1} \in F$.*

Proposição 3.4.3. *O conjunto \mathbb{H}_1 de quatérnios unitários é um subgrupo de $\overset{\circ}{\mathbb{H}}$.*

Demonstração: Sejam $q, q' \in \mathbb{H}_1$. Pela proposição anterior temos que $\|qq'\| = 1$, isto é $qq' \in \mathbb{H}_1$, e portanto temos a condição (i) satisfeita; Pela equação (ii) na 3.2.8 e a proposição anterior temos

$$\|q^{-1}\| = \|q^*\| = \|q\| = 1$$

e assim a segundo condição também esta satisfeita: $q^{-1} \in \mathbb{H}_1$. ■

3.5 Funções Exponencial e Logaritmo

Vamos precisar em breve das versões quatérnias das funções exponencial e logaritmo reais. Nesta seção serão dadas suas definições e algumas conseqüências.

Definição 3.5.1. *Seja $q \in \mathbb{H}_1$, onde $q = [\cos \theta, \text{sen} \theta \mathbf{v}]$. A função logaritmo é definida por*

$$\log q \equiv [0, \theta \mathbf{v}]$$

Note que $\log[1, (0, 0, 0)] = [0, (0, 0, 0)] \equiv 0$ como no caso real. Note também que $\log q$ não é em geral um quatérnio unitário.

Exemplo 3.5.1. *Considere os quatérnios $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$. Escrevendo-os na forma trigonométrica temos*

$$\mathbf{i} = (0, 1, 0, 0) = [\cos \frac{\pi}{2}, \text{sen} \frac{\pi}{2}(1, 0, 0)];$$

$$\mathbf{j} = (0, 0, 1, 0) = [\cos \frac{\pi}{2}, \text{sen} \frac{\pi}{2}(0, 1, 0)];$$

$$\mathbf{k} = (0, 0, 0, 1) = [\cos \frac{\pi}{2}, \text{sen} \frac{\pi}{2}(0, 0, 1)];$$

Calculando o logaritmo destes vetores temos

$$\log \mathbf{i} = [0, \frac{\pi}{2}(1, 0, 0)], \quad \log \mathbf{j} = [0, \frac{\pi}{2}(0, 1, 0)], \quad \log \mathbf{k} = [0, \frac{\pi}{2}(0, 0, 1)].$$

Agora, observe que

$$\log \mathbf{ij} = \log \mathbf{k} = [0, \frac{\pi}{2}(0, 0, 1)]$$

$$\log \mathbf{i} + \log \mathbf{j} = [0, \frac{\pi}{2}(1, 0, 0)] + [0, \frac{\pi}{2}(0, 1, 0)] = [0, \frac{\pi}{2}(1, 1, 0)]$$

portanto,

$$\log \mathbf{ij} \neq \log \mathbf{i} + \log \mathbf{j}$$

■

Definição 3.5.2. *Para um quatérnio da forma $q = [0, \theta \mathbf{v}]$, $\theta \in \mathbb{R}$, $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$, $|\mathbf{v}| = 1$, a função exponencial é definida por*

$$\exp q \equiv [\cos \theta, \text{sen} \theta \mathbf{v}]$$

Note que função exponencial tem imagem em \mathbb{H}_1 e as funções exponencial e logaritmo são mutuamente inversas.

Observação 3.5.1. *É interessante ressaltar que $\exp(\log q) = q$ para todo $q \in \mathbb{H}_1$, como era de se esperar!*

Exemplo 3.5.2. *Considere o quatérnio $[0, \frac{\pi}{2}(0, 0, 1)]$. Pela definição de exponencial temos que*

$$\exp\left([0, \frac{\pi}{2}(1, 0, 0)]\right) = \left[\cos\frac{\pi}{2}, \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}(1, 0, 0)\right] = [0, (1, 0, 0)] = \mathbf{i}$$

e portanto, $\exp(\log(\mathbf{i})) = \mathbf{i}$.

A partir das definições acima podemos definir a exponenciação para $q \in \mathbb{H}_1, t \in \mathbb{R}$:

Definição 3.5.3. *Sejam $q \in \mathbb{H}_1, t \in \mathbb{R}$. A exponenciação q^t é definida por*

$$q^t \equiv \exp(t \log(q)).$$

Isto dá origem às seguintes proposições:

Proposição 3.5.3. *Sejam $q \in \mathbb{H}_1, t \in \mathbb{R}$. Então $\log(q^t) = t \log q$.*

Demonstração: $\log(q^t) = \log(\exp(t \log q)) = t \log q$. ■

Proposição 3.5.4. *Sejam $q \in \mathbb{H}_1, q = [\cos\theta, \operatorname{sen}\theta\mathbf{v}]$ e $a, b \in \mathbb{R}$. Então $q^a q^b = q^{a+b}$.*

Demonstração:

$$\begin{aligned} q^a q^b &= \exp(a \log q) \exp(b \log q) \\ &= \exp(a[0, \theta\mathbf{v}]) \exp(b[0, \theta\mathbf{v}]) \\ &= \exp([0, a\theta\mathbf{v}]) \exp([0, b\theta\mathbf{v}]) \\ &= [\cos a\theta, \operatorname{sen} a\theta \cdot \mathbf{v}][\cos b\theta, \operatorname{sen} b\theta \cdot \mathbf{v}] \\ &= [\cos a\theta \cos b\theta - \operatorname{sen} a\theta \operatorname{sen} b\theta, \\ &\quad (\operatorname{sen} a\theta \cos b\theta + \cos a\theta \operatorname{sen} b\theta) \cdot \mathbf{v}] \\ &= [\cos[(a+b)\theta], \operatorname{sen}[(a+b)\theta] \cdot \mathbf{v}] \\ &= \exp([0, (a+b)\theta \cdot \mathbf{v}]) \\ &= \exp[(a+b) \log q] \\ &= q^{a+b} \end{aligned}$$

■

Uma outra regra para números reais é $(p^a)^b = p^{ab}$. Esta regra também é válida para quatérnios unitários:

Proposição 3.5.5. *Seja $p \in \mathbb{H}_1$ e $a, b \in \mathbb{R}$. Então $(p^a)^b = p^{ab}$.*

Demonstração:

$$\begin{aligned} (p^a)^b &= (\exp(a \log p))^b \\ &= \exp(b \log(\exp(a \log p))) \\ &= \exp(ba \log p) \\ &= p^{ab} \end{aligned}$$

■

Devemos ser muito cuidadosos ao querer usar as funções \log e \exp , como suas correspondentes versões reais. Por exemplo, considere a seguinte dedução incorreta, onde p e q são quatérnios unitários:

$$\begin{aligned} pq &= \exp(\log(pq)) \\ &= \exp(\log p + \log q) \\ &= \exp(\log q + \log p) \\ &= \exp(\log q) \exp(\log p) \\ &= qp \end{aligned}$$

Isto está inconsistente com o fato de que a multiplicação quatérnia não é comutativa. O erro mora na segunda passagem, onde a regra $\log pq = \log p + \log q$ é usada, mas não é válida para quatérnios, conforme visto no exemplo 3.5.1.

3.6 Rotação com Quatérnios

Hamilton procurou descrever rotações no espaço, apenas como os números complexos descrevem rotações no plano. A realidade deste fato é demonstrado nas seguintes proposições:

Proposição 3.6.1. *Sejam $q \in \mathbb{H}_1$ e $p = [s, \mathbf{v}] \in \mathbb{H}$. Então $qpq^{-1} = p'$, onde $p' = [s, \mathbf{v}']$ com $|\mathbf{v}| = |\mathbf{v}'|$.*

Demonstração: Considere $S(q)$ indicando a parte escalar de q . Observe então, que:

$$\begin{aligned} q + q^* &= [s, \mathbf{v}] + [s, -\mathbf{v}] \\ &= [2s, \mathbf{0}] \\ &\equiv 2s \\ &= 2S(q) \end{aligned}$$

isto nos dá que $2S(q) = q + q^*$.

Nossa prova consiste de três passos. Primeiro mostramos que $S(p') = S(p)$, para $\forall p \in \{[s, \mathbf{0}] \mid s \in \mathbb{R}\}$, em seguida para $\forall p \in \{[0, \mathbf{v}] \mid \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3\}$. Finalmente estes resultados serão usados para mostrarmos a proposição para $p \in \mathbb{H}$.

Se p é um escalar, representado-o como o quatérnio $[s, \mathbf{0}]$, é fácil mostrar que $S(p) = S(p')$, observe

$$S(p') = S(qpq^{-1}) = S(q[s, \mathbf{0}]q^{-1}) = S([s, \mathbf{0}]qq^{-1}) = S([s, \mathbf{0}]) = s = S(p)$$

Se p é um vetor de \mathbb{R}^3 representado como um quatérnio, temos

$$\begin{aligned} 2S(p') &= 2S(qpq^{-1}) \\ &= (qpq^{-1}) + (qpq^{-1})^* \\ &= qpq^* + (qpq^*)^* && \text{(proposição 3.4.2)} \\ &= qpq^* + qp^*q^* && \text{(proposições 3.2.4 e 3.2.7)} \\ &= q(p + p^*)q^* && \text{(proposição 3.2.4)} \\ &= q2S(p)q^* && \text{(pelo resultado anterior)} \\ &= 2S(p)qq^* && \text{(multiplicação escalar é comutativa)} \\ &= 2S(p) \end{aligned}$$

Agora, seja $p \in \mathbb{H}$, $p = [s, \mathbf{v}] = [s, \mathbf{0}] + [0, \mathbf{v}]$. Segue-se que

$$\begin{aligned} qpq^{-1} &= q([s, \mathbf{0}] + [0, \mathbf{v}])q^{-1} \\ &= q([s, \mathbf{0}])q^{-1} + q([0, \mathbf{v}])q^{-1} \quad (\text{proposição 3.2.4}) \\ &[s, \mathbf{0}] + [0, \mathbf{v}'] \quad (\text{pelos dois resultados anteriores}) \\ &[s, \mathbf{v}'] \end{aligned}$$

Portanto $S(p') = S(p)$, $\forall p \in \mathbb{H}$. Como $q \in \mathbb{H}_1$, a proposição 3.2.8, equação (iii) garante que $\|p'\| = \|qpq^{-1}\| = \|q\| \|p\| \|q^{-1}\| = \|p\|$. Como as partes escalar de p e p' são iguais, devemos ter que $|\mathbf{v}| = |\mathbf{v}'|$. ■

Corolário 3.6.2. *Sejam $q \in \mathbb{H}_1$, $p = [a, b\mathbf{v}] \in \mathbb{H}$ onde $a, b \in \mathbb{R}$ e $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$. Se $q[a, \mathbf{v}]q^* = [a, \mathbf{v}']$ então $q[a, b\mathbf{v}]q^* = [a, b\mathbf{v}']$.*

Demonstração:

$$\begin{aligned} qpq^* &= q[a, b\mathbf{v}]q^* \\ &= qb[\frac{a}{b}, \mathbf{v}]q^* \\ &= bq[\frac{a}{b}, \mathbf{v}]q^* \\ &= b[\frac{a}{b}, \mathbf{v}'] \quad (\text{proposição 3.6.1}) \\ &= [a, \mathbf{v}'] \end{aligned}$$

■

Em breve nos será útil a seguinte regra:

Proposição 3.6.3. *Sejam $q, p \in \mathbb{H}_1$, $p = [\cos\theta, \text{sen}\theta\mathbf{v}]$ e $t \in \mathbb{R}$. Então $qp^tq^* = (qpq^*)^t$.*

Demonstração: Pelo corolário 3.6.2 existe $\mathbf{v}' \in \mathbb{R}^3$ tal que

$$q[\cos\theta, \text{sen}\theta\mathbf{v}]q^* = [\cos\theta, \text{sen}\theta\mathbf{v}']$$

Obtemos então:

$$\begin{aligned}
 qp^tq^* &= q(\exp(t \log p))q^* \\
 &= q(\exp(t[0, \theta\mathbf{v}]))q^* \\
 &= q(\exp([0, t\theta\mathbf{v}]))q^* \\
 &= q([\cos\theta, \text{sen}\theta\mathbf{v}])q^* \\
 &= [\cos\theta, \text{sen}\theta\mathbf{v}'] && \text{(pelo corolário 3.6.2)} \\
 &= \exp(t[0, \theta\mathbf{v}']) \\
 &= \exp(t \log([\cos\theta, \text{sen}\theta\mathbf{v}'])) \\
 &= \exp(t \log(qpq^*)) \\
 &= (qpq^*)^t
 \end{aligned}$$

■

Agora, já estamos prontos para demonstrar o principal resultado desta seção:

Proposição 3.6.4. *Seja $q \in \mathbb{H}_1$, $q = [\cos\theta, \text{sen}\theta\mathbf{n}]$. Seja $r = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ e $p = [0, r] \in \mathbb{H}$. Então $p' = qpq^{-1}$ é o vetor r girado de 2θ em torno do eixo \mathbf{n} .*

Demonstração: Primeiro mostraremos como um vetor r é girado de um ângulo θ em torno do eixo \mathbf{n} , usando senos, cossenos e os produtos interno e vetorial. Em seguida mostraremos que o mesmo resultado é obtido quando usamos quatérnios.

Assuma então que r é levado em Rr ao ser girado de um ângulo θ em torno do eixo dado pelo vetor unitário \mathbf{n} (veja a figura 3.1).

O vetor r pode ser escrito como soma de duas componentes, r_{\parallel} e r_{\perp} , onde r_{\parallel} é a projeção de r em \mathbf{n} , e r_{\perp} é a projeção ortogonal a \mathbf{n} (veja figura 3.2). Obtemos então:

$$\begin{aligned}
 r_{\parallel} &= (r \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} \\
 r_{\perp} &= r - r_{\parallel} = r - (r \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}
 \end{aligned}$$

Para ver como uma rotação age em r , colocaremos um sistema de coordenadas no plano ortogonal a \mathbf{n} que contém os pontos designados por r e Rr . Para fazer isto,

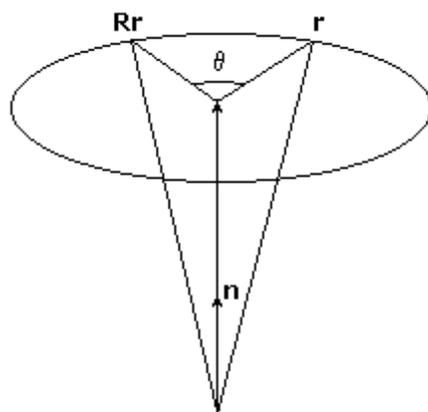


Figura 3.1: Rotação em \mathbb{R}^3

necessitamos de um vetor que é ortogonal a r_{\perp} e \mathbf{n} :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{v} &= \mathbf{n} \times r_{\perp} \\
 &= \mathbf{n} \times [r - (r \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}] \\
 &= \mathbf{n} \times r - \mathbf{n} \times (r \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} \\
 &= \mathbf{n} \times r - \mathbf{0} \\
 &= \mathbf{n} \times r
 \end{aligned}$$

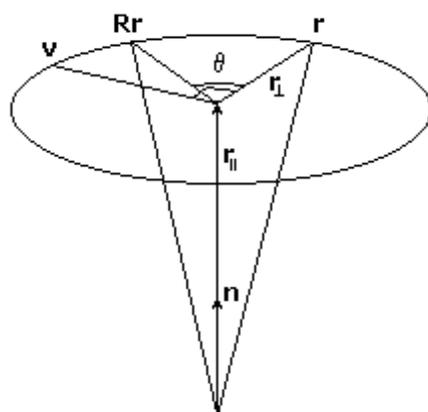


Figura 3.2: Rotação em \mathbb{R}^3

Pela figura 3.2, temos que a componente de Rr ortogonal a \mathbf{n} , $(Rr)_\perp$ é dada por

$$(Rr)_\perp = r_\perp \cos\theta + \mathbf{v} \operatorname{sen}\theta$$

Logo,

$$\begin{aligned} Rr &= (Rr)_\parallel + (Rr)_\perp \\ &= r_\parallel + r_\perp \cos\theta + \mathbf{v} \operatorname{sen}\theta \\ &= (r \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} + [r - (r \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}] \cos\theta + \mathbf{v} \operatorname{sen}\theta \\ &= (r \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} - (r \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} \cos\theta + r \cos\theta + \mathbf{v} \operatorname{sen}\theta \\ &= (1 - \cos\theta)(r \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} + r \cos\theta + (\mathbf{n} \times r) \operatorname{sen}\theta \end{aligned} \tag{3.3}$$

Examinaremos agora o efeito de aplicarmos um quatérnio a um vetor na maneira descrita no enunciado, e veremos que ocorre o mesmo resultado que obtemos em (3.3). Considere $R_q(p) = qpq^{-1}$. Lembre-se que $p = [0, \mathbf{r}]$ e que $q = [s, \mathbf{v}]$ é um quatérnio unitário. Segue-se que

$$\begin{aligned} R_q(p) &= [s, \mathbf{v}][0, \mathbf{r}][s, \mathbf{v}]^{-1} \\ &= [s, \mathbf{v}][0, \mathbf{r}][s, -\mathbf{v}] \\ &= [s, \mathbf{v}][\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}, s\mathbf{r} - \mathbf{r} \times \mathbf{v}] \\ &= [s(\mathbf{v} \cdot \mathbf{r}) - \mathbf{v} \cdot (s\mathbf{r} - \mathbf{r} \times \mathbf{v}), s(s\mathbf{r} - \mathbf{r} \times \mathbf{v}) + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{r})\mathbf{v} + \mathbf{v} \times (s\mathbf{r} - \mathbf{r} \times \mathbf{v})] \\ &= [0, s^2\mathbf{r} - \mathbf{s}(\mathbf{r} \times \mathbf{v}) + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{r})\mathbf{v} + \mathbf{v} \times (s\mathbf{r}) - \mathbf{v} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{v})] \\ &= [0, s^2\mathbf{r} + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{r})\mathbf{v} - \mathbf{v} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{v}) - 2\mathbf{s}(\mathbf{r} \times \mathbf{v})] \\ &= [0, s^2\mathbf{r} + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{r})\mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v})\mathbf{r} + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{r})\mathbf{v} + 2\mathbf{s}(\mathbf{r} \times \mathbf{v})]^{(*)} \\ &= [0, (s^2 - \mathbf{v} \cdot \mathbf{v})\mathbf{r} + 2(\mathbf{v} \cdot \mathbf{r})\mathbf{v} + 2\mathbf{s}(\mathbf{r} \times \mathbf{v})] \end{aligned}$$

(*) Aqui foi usada a identidade $\mathbf{v}_1 \times (\mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3) = (\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_3)\mathbf{v}_2 - (\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2)\mathbf{v}_3$.

Como q é um quatérnio unitário, podemos escrever $q = [\cos\theta, (\operatorname{sen}\theta)\mathbf{n}]$, onde $|\mathbf{n}| = 1$.

Substituindo isto em $R_q(p)$, obtemos:

$$\begin{aligned} R_q(p) &= [0, (\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta(\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}))\mathbf{r} + 2((\operatorname{sen}\theta)\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}) \cdot (\operatorname{sen}\theta)\mathbf{n}] + \\ &\quad + 2\cos\theta \operatorname{sen}\theta (\mathbf{n} \times \mathbf{r})] \\ &= [0, (\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta)\mathbf{r} + (2\mathbf{n} \operatorname{sen}^2\theta)(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}) + \\ &\quad + 2\cos\theta \operatorname{sen}\theta (\mathbf{n} \times \mathbf{r})] \\ &= [0, \mathbf{r} \cos 2\theta + (1 - \cos 2\theta)(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r})\mathbf{n} + (\mathbf{n} \times \mathbf{r}) \operatorname{sen} 2\theta] \end{aligned}$$

Na dedução acima vemos que o resultado é o mesmo vetor que está na equação 3.3, exceto que, a equação acima tem 2θ no lugar de θ . Assim, dado um vetor unitário \mathbf{n} e um ângulo de rotação θ , o quatérnio $[\cos\theta, \text{sen}\theta\mathbf{n}]$ pode ser usado para girar o vetor \mathbf{r} de um ângulo 2θ em torno do vetor \mathbf{n} . ■

Como consequência desta proposição, obtemos o importante corolário a seguir:

Corolário 3.6.5. *Qualquer rotação tridimensional de um ângulo θ em torno de \mathbf{n} , $|\mathbf{n}| = 1$, pode ser obtida por um quatérnio unitário.*

Demonstração: Basta tomarmos na proposição anterior q , tal que $q = [\cos\frac{\theta}{2}, \text{sen}\frac{\theta}{2}\mathbf{n}]$. Assim a rotação desejada é obtida. ■

Exemplo 3.6.6. *Considere a rotação de $\frac{\pi}{3}$ rad, em torno do vetor $(1, 0, 0) \in \mathbb{R}^3$. O quatérnio que representa esta rotação é dado por*

$$\begin{aligned} q &= [\cos\frac{\pi}{6}, \text{sen}\frac{\pi}{6}(1, 0, 0)] \\ &= [\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}(1, 0, 0)] \\ &= [\frac{\sqrt{3}}{2}, (\frac{1}{2}, 0, 0)] \end{aligned}$$

A composição de rotações pode ser obtida pela multiplicação dos quatérnios correspondentes. Isto é formalizado em:

Proposição 3.6.7. *Sejam $q_1, q_2 \in \mathbb{H}_1$. A rotação dada por q_1 seguida pela rotação dada por q_2 é equivalente à rotação dada por q_2q_1 .*

Demonstração:

$$\begin{aligned}
 R_{q_2} \circ R_{q_1}(p) &= R_{q_2}(R_{q_1}(p)) \\
 &= R_{q_2}(q_1 p q_1^{-1}) \\
 &= q_2 (q_1 p q_1^{-1}) q_2^{-1} \\
 &= (q_2 q_1) p (q_1^* q_2^*) \quad (\text{pela proposição 3.4.2}) \\
 &= (q_2 q_1) p (q_2 q_1)^* \quad (\text{pela proposição 3.2.7}) \\
 &= (q_2 q_1) p (q_2 q_1)^{-1} \quad (\text{pela proposição 3.4.2}) \\
 &= R_{q_2 q_1}(p)
 \end{aligned}$$

■

3.6.1 Os quatérnios q e q^{-1}

Seja $q = [s, \mathbf{v}] \in \mathbb{H}_1$. Temos que $q^{-1} = q^* = [s, -\mathbf{v}]$. É importante considerarmos a interpretação geométrica destes dois quatérnios: q^{-1} o inverso de q , gira o mesmo ângulo que q , mas o eixo tem sentido contrário.

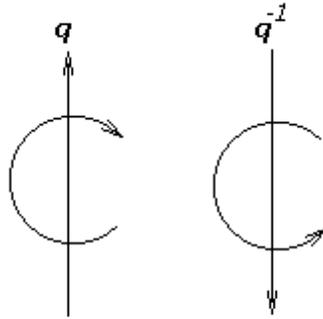


Figura 3.3: Os Quatérnios q e q^{-1}

Isto nos diz que, se invertermos o eixo de q^{-1} de modo a fazê-lo coincidir com o eixo de q , veremos que q^{-1} realiza uma rotação reversa a de q , ou seja, o que q faz, q^{-1} desfaz.

Seja $p = [0, \mathbf{v}] \in \mathbb{H}$. Temos que

$$R_q(p) = qpq^{-1} \text{ e } R_{q^{-1}}(p) = q^{-1}p(q^{-1})^{-1} = q^{-1}pq$$

observe que

$$R_{q^{-1}}(R_q(p)) = q^{-1}(qpq^{-1})q = q^{-1}qpq^{-1}q = p.$$

Isto traduz em linguagem matemática o que foi dito anteriormente.

3.6.2 Os quatérnios q e $-q$

Seja $p = [0, \mathbf{v}] \in \mathbb{H}$. Observe que

$$R_q(p) = qpq^{-1}$$

e

$$R_{-q}(p) = (-q)p(-q)^{-1} = qpq^{-1} = R_q(p)$$

Logo, os quatérnios q e $-q$ representam exatamente a mesma rotação. Isto pode ser surpreendente, mas era de se esperar: uma rotação de um ângulo θ em torno de um eixo \mathbf{n} (o quatérnio q) pode também ser expressa como uma rotação de um ângulo $-\theta$ em torno do eixo $-\mathbf{n}$ (o quatérnio $-q$).

3.6.3 Quatérnios Não-unitários

A seguir demonstramos um fato que permite generalizar para quatérnios não-unitários, as proposições demonstradas anteriormente para os quatérnios unitários.

Proposição 3.6.8. *Sejam $p \in \mathbb{H}$, $p = [s, (x, y, z)] = [s, \mathbf{v}]$ e $q \in \mathring{\mathbb{H}}$. Se $r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, então $(rq)p(rq)^{-1} = qpq^{-1}$.*

Demonstração: Seja $r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. O inverso de rq é $q^{-1}r^{-1}$. Como a multiplicação de um quatérnio por um escalar é comutativa, podemos escrever:

$$\begin{aligned} (rq)p(rq)^{-1} &= rqpq^{-1}r^{-1} \\ &= qpq^{-1}rr^{-1} \\ &= qpq^{-1} \end{aligned}$$

Assim, qpq^{-1} é inalterado se q é multiplicado por qualquer escalar não-nulo. ■

Segue-se da proposição 3.6.8 que todos os quatérnios da forma rq com $r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e $q \in \mathbb{H}_1$ representam a mesma rotação designada pelo quatérnio q .

3.7 Quatérnios e o Cálculo Diferencial

Nesta seção mostraremos uma série de resultados comuns ao cálculo diferencial para funções de \mathbb{R} em \mathbb{H} . Os resultados serão usados posteriormente para mostrar que algumas curvas de interpolação são diferenciáveis.

Definição 3.7.1. *Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}$ uma função contínua. A derivada f' de f está definida da seguinte maneira,*

$$f'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}.$$

Proposição 3.7.1. *Seja $q = [\cos\theta, \text{sen}\theta\mathbf{v}] \in \mathbb{H}_1$, $t \in \mathbb{R}$. Então*

$$\frac{d}{dt}(q^t) = q^t \log(q).$$

Demonstração: Este resultado é mostrado através do simples cálculo de ambos os lados da equação.

O lado esquerdo:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(q^t) &= \frac{d}{dt}(\exp(t \log q)) \\ &= \frac{d}{dt}(\exp(t[0, \theta \mathbf{v}])) \\ &= \frac{d}{dt}([\cos(t\theta), \text{sen}(t\theta) \mathbf{v}]) \\ &= \theta[-\text{sen}(t\theta), \cos(t\theta) \mathbf{v}] \end{aligned}$$

O lado direito:

$$\begin{aligned} q^t \log(q) &= \exp(t \log q) \log q \\ &= [\cos(t\theta), \text{sen}(t\theta) \mathbf{v}][0, \theta \mathbf{v}] \\ &= [-\theta \text{sen}(t\theta)(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}), \theta \cos(t\theta) \mathbf{v} + \theta \text{sen}(t\theta)(\mathbf{v} \times \mathbf{v})] \\ &= [-\theta \text{sen}(t\theta), \theta \cos(t\theta) \mathbf{v}] \\ &= \theta[-\text{sen}(t\theta), \cos(t\theta) \mathbf{v}] \end{aligned}$$

■

Proposição 3.7.2 (Regra do Produto). *Sejam $f, g \in C^1(\mathbb{R}, H)$. Então*

$$\frac{d}{dt}(f(t)g(t)) = \left(\frac{d}{dt}f(t)\right)g(t) + f(t)\left(\frac{d}{dt}g(t)\right).$$

Demonstração:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(f(t)g(t)) &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{f(t+\delta)g(t+\delta) - f(t)g(t)}{\delta} \\ &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{f(t+\delta)g(t+\delta) - f(t+\delta)g(t) + f(t+\delta)g(t) - f(t)g(t)}{\delta} \\ &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \left(f(t+\delta) \frac{(g(t+\delta) - g(t))}{\delta} + \frac{(f(t+\delta) - f(t))}{\delta} g(t) \right) \\ &= f(t)g'(t) + f'(t)g(t) \\ &= f'(t)g(t) + f(t)g'(t) \end{aligned}$$

■

Observe que, embora esta regra do produto seja idêntica à regra usada para funções reais, é importante preservar a ordem das multiplicações envolvidas, já que a multiplicação quatérnia não é comutativa.

Proposição 3.7.3 (Regra da Cadeia). *Sejam $f \in C^1(\mathbb{H}, \mathbb{H})$, $g \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{H})$. Então*

$$\frac{d}{dt}f(g(t)) = f'(g(t))g'(t).$$

Demonstração: Seja $b = g(c)$, $\lambda = Dg(c)$ e $\mu = Df(g(c))$. Definimos

- (1) $\varphi(x) = g(x) - g(c) - \lambda(x - c)$
- (2) $\psi(y) = f(y) - f(b) - \mu(y - b)$
- (3) $\rho(x) = f \circ g(x) - f \circ g(c) - \mu \circ \lambda(x - c)$

então

- (4) $\lim_{x \rightarrow c} \frac{\|\varphi(x)\|}{|x-c|} = 0$
- (5) $\lim_{y \rightarrow b} \frac{\|\psi(y)\|}{|y-b|} = 0$

e devemos mostrar que

$$(6) \quad \lim_{x \rightarrow c} \frac{\|\rho(x)\|}{|x-c|} = 0$$

Agora, observe que

$$\begin{aligned} \rho(x) &= f(g(x)) - f(g(c)) - \mu(\lambda(x - c)) \\ &= f(g(x)) - f(b) - \mu(g(x) - g(c) - \varphi(x)) \quad (\text{por (1)}) \\ &= f(g(x)) - f(b) - \mu(g(x) - g(c)) + \mu(\varphi(x)) \\ &= [f(g(x)) - f(b) - \mu(g(x) - b)] + \mu(\varphi(x)) \\ &= \psi(g(x)) + \mu(\varphi(x)) \quad (\text{por (2)}) \end{aligned}$$

Assim devemos provar que

- (7) $\lim_{x \rightarrow c} \frac{\|\psi(g(x))\|}{|x-c|} = 0$
- (8) $\lim_{x \rightarrow c} \frac{\|\mu(\varphi(x))\|}{|x-c|} = 0$

Dado $\varepsilon > 0$, segue-se de (5) que para algum $\delta > 0$, temos

$$\|\psi(g(x))\| < \varepsilon \|g(x) - b\| \text{ se } \|g(x) - b\| < \delta,$$

que é verdade se $\|x - c\| < \delta_1$, para um δ_1 adequado. Então

$$\begin{aligned} \|\psi(g(x))\| &< \varepsilon \|g(x) - b\| \\ &= \varepsilon \|\varphi(x) + \lambda(x - c)\| \\ &\leq \varepsilon \|\varphi(x)\| + \varepsilon M \|x - c\| \end{aligned}$$

para algum M , pela linearidade de λ . A equação (7) agora segue-se facilmente.

A prova da equação (8) segue-se da linearidade de μ , ou seja, $\exists N$ tal que $\|\mu(\varphi(x))\| \leq N \|\varphi(x)\|$ e da equação (4). ■

Finalmente, enunciamos o seguinte resultado, que não tem algo análogo nos números reais:

Proposição 3.7.4. *Sejam $q \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{H}_1)$, $r \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Como q aplica \mathbb{R} em \mathbb{H}_1 , $q(t)$ pode ser escrito como $[\cos\theta(t), \text{sen}\theta(t)\mathbf{v}(t)]$, e assim temos*

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}q(t)^{r(t)} &= [-\text{sen}(r(t)\theta(t)) (r'(t)\theta(t)) + r(t)\theta'(t)], \\ &\quad \cos(r(t)\theta(t)) (r'(t)\theta(t)) + r(t)\theta'(t) \mathbf{v}(t) + \\ &\quad + \text{sen}(r(t)\theta(t))\mathbf{v}'(t)]. \end{aligned}$$

Demonstração:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}q(t)^{r(t)} &= \frac{d}{dt} \exp(r(t) \log(q(t))) \\ &= \frac{d}{dt} \exp(r(t)[0, \mathbf{v}(t)\theta(t)]) \\ &= \frac{d}{dt} \exp([0, r(t)\mathbf{v}(t)\theta(t)]) \\ &= \frac{d}{dt} [\cos(r(t)\theta(t)), \text{sen}(r(t)\theta(t))\mathbf{v}(t)] \\ &= [-\text{sen}(r(t)\theta(t)) (r'(t)\theta(t)) + r(t)\theta'(t)], \\ &\quad \cos(r(t)\theta(t)) (r'(t)\theta(t)) + r(t)\theta'(t) \mathbf{v}(t) + \\ &\quad + \text{sen}(r(t)\theta(t))\mathbf{v}'(t)]. \end{aligned}$$

■

3.8 Quatérnios: Vantagens e Desvantagens

Uma das desvantagens do uso dos quatérnios é que eles apenas podem representar rotações. Outras espécies de transformações, tais como translações, mudanças de escala, reflexões não são adequadas ou até mesmo não possíveis. Pode-se implementar uma translação, considerando o vetor translação como um quatérnio de parte escalar nula. Em [12] uma espécie de quatérnios homogêneos são definidos com uma multiplicação particular, fazendo ambas translação e rotação.

Embora seja possível definir quatérnios homogêneos e incluir as translações na representação quatérnia, esta extensão não é tão elegante quanto às matrizes homogêneas (veja [6]). A extensão homogênea parece ignorada na literatura, sendo portanto os quatérnios usados exclusivamente para representar rotações e matrizes para todas as outras transformações.

Uma outra desvantagem é que a teoria quatérnia não está incluída na maioria dos currículos da Matemática moderna, causando assim a aparência de ser complicada. Alguns podem estudar o grupo dos quatérnios em Álgebra, mas o conhecimento sobre quatérnios é, em geral, não difundido. Assim, quatérnios requerem um pouco de esforço no início. Entretanto, quatérnios não deve ser problema para quem tem algum domínio sobre Álgebra matricial.

Uma vantagem é sua óbvia interpretação geométrica, pois representam rotação como um ângulo de rotação e o eixo sobre o qual deve ser feita a rotação. Isto é mais natural do que tentar decompor uma rotação em ângulos de Euler, por exemplo.

A aplicação entre quatérnios e rotação é, portanto, não ambígua com exceção que, toda rotação pode ser representada por dois quatérnios. Isto parece ser um defeito na representação quatérnia. Que os quatérnios q e $-q$ representam a mesma rotação mostra um lado agradável matematicamente. Isto ocorre porque rotações por si próprias vem aos pares. Dada uma rotação em torno de um eixo e numa direção

qualquer, a mesma rotação pode ser obtida girando em torno do eixo oposto, na direção oposta. (veja seção 3.6.2 na pg. 36).

Rotações quatérnicas não são influenciadas pela escolha do sistema de coordenadas e o usuário de um sistema de animação não necessita se preocupar quanto à convenção da ordem das rotações, algo que não é possível quando se usa ângulos de Euler. (veja cap.1).

A representação de rotações usando quatérnios é compacta, no sentido de que são quadri-dimensionais e assim somente têm quatro graus de liberdade, uma vantagem muito grande quando se compara às matrizes de rotação que têm seis graus de liberdade (veja [6]). E quando são necessárias composições de rotações, o uso de quatérnios é muito simples, pois corresponde a multiplicar os dois quatérnios envolvidos. O algoritmo que usamos (veja apêndice A) mostra uma maneira eficiente de multiplicação de quatérnios onde são usadas apenas 32 adições e 12 multiplicações, menos da metade das operações realizadas quando se multiplicam duas matrizes de rotação (18 adições e 27 multiplicações).

Finalmente, os quatérnios não apresentam o problema *gimbal lock* que surge quando usamos ângulos de Euler, pois este é um problema inato da representação matricial usada para os três ângulos de Euler.

Assim, podemos concluir, diante desta lista de vantagens e desvantagens, que os quatérnios constituem a melhor escolha para representação de rotações tridimensionais.

Capítulo 4

Interpolação de Rotações

Nos capítulos anteriores apresentamos e discutimos algumas modalidades de rotações. Agora, introduzimos a noção de interpolação entre rotações, veremos alguns métodos de interpolação entre duas rotações e por fim uma discussão sobre a interpolação sobre uma série de rotações. Deixaremos para o capítulo 4 o desenvolvimento de um método de interpolação sobre um seqüência de rotações, que é o resultado central deste trabalho.

4.1 Interpolação entre Duas Rotações

Iniciemos pela definição do que vem a ser uma curva de interpolação:

Definição 4.1.1. *Dado um conjunto arbitrário M , uma interpolação entre $x_0 \in M$ e $x_1 \in M$, que tem como parâmetro $h \in [0, 1]$ é dada pela curva $\gamma : M \times M \times [0, 1] \rightarrow M$ que satisfaz as condições*

$$\gamma(x_0, x_1, 0) = x_0$$

$$\gamma(x_0, x_1, 1) = x_1$$

4.1.1 Interpolação Linear de Euler: *LinEuler*

Este é o método mais simples, consistindo da interpolação linear entre duas 3-uplas de ângulos de Euler. Chamamos de *LinEuler*, a curva de interpolação entre $v_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ e $v_1 = (x_1, y_1, z_1) \in \mathbb{R}^3$, com $h \in [0, 1]$, definida da seguinte forma:

$$\text{LinEuler}(v_0, v_1, h) = v_0(1 - h) + v_1h$$

4.1.2 Interpolação Linear Matricial: *LinMat*

Uma outra alternativa é a interpolação linear entre duas matrizes $M_0 \in SO(3)$ e $M_1 \in SO(3)$, com $h \in [0, 1]$, definida por

$$\text{LinMat}(M_0, M_1, h) = M_0(1 - h) + M_1h$$

Este método traz sérios problemas, pois a interpolação linear entre matrizes ortogonais não é em geral uma matriz ortogonal, podendo assim obter um resultado insatisfatório, produzindo uma animação fora da realidade.

4.1.3 Interpolação Linear Quatérnia: *Lerp*

Outro método é usar a interpolação linear entre rotações representadas através de quatérnios, que chamamos *Lerp*¹. Para $q_0, q_1 \in \mathbb{H}_1$ e $h \in [0, 1]$ esta curva é definida da seguinte forma por

$$\text{Lerp}(q_0, q_1, h) = q_0(1 - h) + q_1h$$

A curva obtida pela interpolação linear quatérnia é uma linha reta no espaço quadridimensional. Como $q_0, q_1 \in \mathbb{H}_1$, esta linha está mergulhada abaixo da superfície

¹Lerp: **L**inear **IntERP**olation.

da esfera unitária de \mathbb{R}^4 . Como todo quatérnio em uma reta passando pela origem representam a mesma rotação, a curva pode ser projetada na superfície da esfera através da normalização de seus pontos sem alterar as rotações correspondentes. Para uma visualização da interpolação de rotações usando a curva *Lerp* veja o programa *Lerp* que está disponível em: <ftp://mat.ufpb.br/pub/mat/quat2000.zip>.

4.1.4 Interpolação Linear Quatérnia Esférica: *Slerp*

Como foi visto na proposição 3.6.8, todos os quatérnios em uma reta passando pela origem, com exceção à própria origem, realizam a mesma rotação. Entretanto desejamos usar somente quatérnios unitários para rotações, pois estes possuem uma ampla lista de propriedades que são úteis.

A interpolação linear simples produz uma secante entre os dois quatérnios. Assim sendo, a função de interpolação apresenta maior velocidade no meio da curva (veja figura 4.1). Fora este detalhe a função *Lerp* é ótima. Uma idéia óbvia para definir

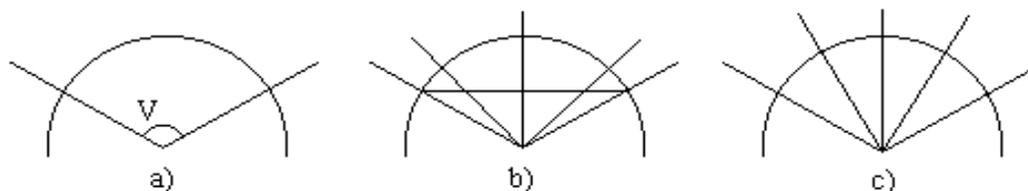


Figura 4.1: Comparação entre as curvas de interpolação *Lerp* e *Slerp*

um método de interpolação é, produzir a mesma curva mas, com todos os quatérnios interpolantes sendo unitários. Em vez de fazer uma interpolação linear simples, a curva deve seguir um grande arco na esfera unitária quatérnia de uma rotação à outra. Esta curva é chamada “*grande arco de interpolação*” ou “*interpolação linear esférica - Slerp²*”, abreviadamente.

²*Slerp*: **S**pherical **L**inear **I**nt**ER**Polation

Esta interpolação pode ser enunciada como segue. Dados $p, q \in \mathbb{H}_1$ e $h \in [0, 1]$ as seguintes funções são expressões iguais para a interpolação linear esférica:

- i)** $Slerp(p, q, h) = p(p^*q)^h$
- ii)** $Slerp(p, q, h) = (pq^*)^{1-h}q$
- iii)** $Slerp(p, q, h) = (qp^*)^hp$
- iv)** $Slerp(p, q, h) = q(q^*p)^{1-h}$

Observe que

$$Slerp(p, q, h) = Slerp(q, p, 1 - h)$$

A equivalência das quatro expressões para $Slerp$ é originária da seguinte proposição inspirada por [10]:

Proposição 4.1.1. *Para $p, q \in H_1$ e $h \in \mathbb{R}$ as quatro expressões seguintes são iguais:*

- i)** $p(p^*q)^h$;
- ii)** $(pq^*)^{1-h}q$;
- iii)** $(qp^*)^hp$;
- iv)** $q(q^*p)^{1-h}$.

Demonstração: Primeiro mostraremos que **(i)** = **(iii)**:

$$\begin{aligned} p(p^*q)^h &= p(p^*q)^h(p^*p) \\ &= (p(p^*q)^hp^*)p \\ &= (pp^*qp^*)^hp \quad (\text{proposição 3.6.3}) \\ &= (qp^*)^hp \end{aligned}$$

Agora mostraremos que **(iv)** = **(ii)**:

$$\begin{aligned} q(q^*p)^{1-h} &= q(q^*p)^{1-h}(q^*q) \\ &= (q(q^*p)^{1-h}q^*)q \\ &= (qq^*pq^*)^{1-h}q \quad (\text{proposição 3.6.3}) \\ &= (pq^*)^{1-h}q \end{aligned}$$

E finalmente, mostraremos que (ii) = (i):

$$\begin{aligned}
 (pq^*)^{1-h}q &= (pq^*)(pq^*)^{-h}q && \text{(proposição 3.5.4)} \\
 &= (pq^*)((pq^*)^{-1})^hq && \text{(proposição 3.5.5)} \\
 &= (pq^*)((pq^*)^*)^hq \\
 &= (pq^*)(qp^*)^hq \\
 &= p(q^*(qp^*)^hq) \\
 &= p(q^*qp^*q)^h && \text{(proposição 3.6.3)} \\
 &= p(p^*q)^h
 \end{aligned}$$

■

Assim, temos provado a igualdade das quatro expressões para *Slerp*. De agora em diante usaremos $Slerp(p, q, h) = p(p^*q)^h$.

Não é óbvio que a curva de interpolação *Slerp*, descreve de fato um *grande arco* na esfera unitária quadri-dimensional quatérnia³4.1.3. Várias vezes na literatura é enunciado que isto segue diretamente da estrutura de grupo de Lie que têm os quatérnios unitários. Fornecemos uma prova completa na proposição 4.1.3, requerendo apenas algum conhecimento básico sobre Geometria Diferencial.

Existem várias maneiras distintas de provar a proposição 4.1.3. Uma delas é olhar para a curvatura da curva *Slerp*. É honestamente fácil provar que a curvatura é constante na curva de interpolação inteira. Somente grandes arcos têm curvatura constante numa esfera unitária. No entanto, usaremos uma outra prova para a proposição em questão. O ponto chave na demonstração é observar que a curva é um grande arco se o vetor derivada segunda é paralelo e com direção oposta ao vetor posição da curva, ou seja, $\frac{d^2}{dh^2}Slerp(p, q, h) = cSlerp(p, q, h)$, com $c \leq 0$. Isto corresponde a forças agindo num objeto, fazendo-o descrever um movimento circular plano com velocidade angular constante.

Antes da prova necessitamos do seguinte lema:

³Esta esfera é também denotada por S^3 .

Lema 4.1.2. *Sejam $p = [s, \mathbf{v}]$, $q_1 = [s_1, \mathbf{v}_1]$, $q_2 = [s_2, \mathbf{v}_2] \in \mathbb{H}$ onde $\mathbf{v}_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $\mathbf{v}_2 = (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3$. Então $(pq_1) \cdot (pq_2) = \|p\|^2 (q_1 \cdot q_2)$, onde “ \cdot ” representa o produto interno de quatérnios.*

Demonstração:

$$\begin{aligned}
(pq_1) \cdot (pq_2) &= [ss_1 - \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_1, s\mathbf{v}_1 + s_1\mathbf{v} + \mathbf{v} \times \mathbf{v}_1] \cdot [ss_1 - \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_1, \\
&\quad s\mathbf{v}_1 + s_1\mathbf{v} + \mathbf{v} \times \mathbf{v}_1] \\
&= s^2s_1s_2 - ss_1\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_2 - ss_2\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_1 + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_1)(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_2) + \\
&\quad + s^2\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 + ss_2\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_1 + s\mathbf{v}_1 \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{v}_2) + ss_1\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_2 + \\
&\quad + s_1s_2\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + s_1\mathbf{v} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{v}_2) + s(\mathbf{v} \times \mathbf{v}_1) \cdot \mathbf{v}_2 + \\
&\quad + s_2(\mathbf{v} \times \mathbf{v}_1) \cdot \mathbf{v} + (\mathbf{v} \times \mathbf{v}_1) \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{v}_2) \\
&= s^2s_1s_2 + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_1)(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_2) + s^2\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 + s\mathbf{v}_1 \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{v}_2) + \\
&\quad + s_1s_2\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + s(\mathbf{v} \times \mathbf{v}_1) \cdot \mathbf{v}_2 + (\mathbf{v} \times \mathbf{v}_1) \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{v}_2)
\end{aligned}$$

usando:

$$(\mathbf{v} \times \mathbf{v}_1) \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{v}_2) = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v})(\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2) - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_2)(\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v})$$

para simplificar essa expressão obtemos:

$$\begin{aligned}
(pq_1) \cdot (pq_2) &= s^2s_1s_2 + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_1)(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_2) + s^2\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 + s\mathbf{v}_1 \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{v}_2) + \\
&\quad + s_1s_2\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + s(\mathbf{v} \times \mathbf{v}_1) \cdot \mathbf{v}_2 + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v})(\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2) - \\
&\quad - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_2)(\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}) \\
&= (s^2 + \mathbf{v} \cdot \mathbf{v})s_1s_2 + (s^2 + \mathbf{v} \cdot \mathbf{v})(\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2) + \\
&\quad + s\mathbf{v}_1 \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{v}_2) + s(\mathbf{v} \times \mathbf{v}_1) \cdot \mathbf{v}_2 \\
&= \|p\|^2 (q_1 \cdot q_2) + s\mathbf{v}_1 \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{v}_2) + s(\mathbf{v} \times \mathbf{v}_1) \cdot \mathbf{v}_2
\end{aligned}$$

Finalmente, usando a identidade

$$\mathbf{v} \cdot (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2) = \begin{vmatrix} x & y & z \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = xy_1z_2 + x_2yz_1 + x_1y_2z - xy_2z_1 - x_1yz_2 - x_2y_1z$$

segue-se que

$$\begin{aligned}
(pq_1) \cdot (pq_2) &= \|p\|^2 (q_1 \cdot q_2) + s\mathbf{v}_1 \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{v}_2) + s(\mathbf{v} \times \mathbf{v}_1) \cdot \mathbf{v}_2 \\
&= \|p\|^2 (q_1 \cdot q_2) + s(x_1y_2z_2 + x_2y_1z_2 + xy_2z_1 - x_1y_2z - xy_1z_2 + \\
&\quad + x_2yz_1) + s(x_2yz_1 + x_1y_2z + xy_1z_2 - x_2y_1z - xy_2z_1 - x_1yz_2) \\
&= \|p\|^2 (q_1 \cdot q_2)
\end{aligned}$$

■

Proposição 4.1.3. *A curva $Slerp(p, q, h) : \mathbb{H}_1 \times \mathbb{H}_1 \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{H}_1$ é um grande arco na esfera unitária quatérnia entre p e q . O vetor posição da curva $Slerp$ tem velocidade angular ⁴ constante.*

Demonstração: Para demonstrar esta proposição devemos mostrar que as quatro condições abaixo são verdadeiras:

$$Slerp(p, q, 0) = p; \tag{4.1}$$

$$Slerp(p, q, 1) = q; \tag{4.2}$$

$$\|Slerp(p, q, h)\| = 1, \forall h \in [0, 1]; \tag{4.3}$$

$$\frac{d^2}{dh^2} Slerp(p, q, h) = c Slerp(p, q, h), \quad c \leq 0, c \in \mathbb{R}. \tag{4.4}$$

As condições 4.1 e 4.2 seguem diretamente das definições das funções \log e \exp , veja:

$$Slerp(p, q, 0) = p(p^*q)^0 = p \exp([0, \mathbf{0}]) = p[1, \mathbf{0}] = p;$$

$$Slerp(p, q, 1) = p(p^*q)^1 = p \exp(\log(p^*q)) = p(p^*q) = q;$$

⁴Esta nada mais é do que a norma do vetor posição da curva em questão

A condição 4.3 segue do fato que \exp é uma função de \mathbb{R} em \mathbb{H}_1 e que a norma do produto é o produto das normas:

$$\begin{aligned} \|Slerp(p, q, h)\| &= \|p(p^*q)^h\| \\ &= \|p\| \|(p^*q)^h\| \\ &= 1 \|(p^*q)^h\| \\ &= \|\exp(h \log(p^*q))\| \\ &= 1. \end{aligned}$$

Para mostrar a condição 4.4, necessitamos da segunda derivada da função $Slerp$. Usando a proposição 3.7.1, encontramos:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dh} Slerp(p, q, h) &= \frac{d}{dh} p(p^*q)^h \\ &= p(p^*q)^h \log(p^*q) \\ &= Slerp(p, q, h) \log(p^*q) \\ \frac{d^2}{dh^2} Slerp(p, q, h) &= \frac{d}{dh} Slerp(p, q, h) \log(p^*q) \\ &= Slerp(p, q, h) \log^2(p^*q) \end{aligned}$$

Assim a condição 4.4 vale se $\log^2(p^*q)$ é um número real não-positivo. Como $p^*, q \in \mathbb{H}_1$, $p^*q \in \mathbb{H}_1$. Pela proposição 3.4.1 existem $\theta \in \mathbb{R}$ e $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$, com $|\mathbf{v}| = 1$, tal que $p^*q = [\cos \theta, \text{sen} \theta \mathbf{v}]$. Logo:

$$\begin{aligned} \log^2(p^*q) &= [0, \theta \mathbf{v}]^2 \\ &= [-\theta^2 \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}, \theta^2 \mathbf{v} \times \mathbf{v}] \\ &= [-\theta^2, 0] \end{aligned}$$

Concluimos portanto, que $\frac{d^2}{dh^2} Slerp(p, q, h) = c Slerp(p, q, h)$, onde $c = -\theta^2 \leq 0$. ■

Tendo mostrado que $Slerp(p, q, h)$, $h \in [0, 1]$ descreve um grande arco entre p e q , existem ainda duas possíveis curvas dependendo de qual direção em torno da esfera unitária, a curva segue. A seguinte proposição assegura que $Slerp$ descreve o menor arco.

Proposição 4.1.4. *Sejam $p, q \in \mathbb{H}_1$. Então $Slerp(p, q, h)$, $h \in [0, 1]$, descreve o menor grande arco entre p e q na esfera unitária quatérnia.*

Demonstração: Seja $q_{\frac{1}{2}} = Slerp(p, q, \frac{1}{2})$ e seja α o ângulo entre p e $q_{\frac{1}{2}}$. A função $Slerp$ descreve o menor arco entre p e q , se e somente se, $\alpha \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Isto é equivalente a dizer que $\cos(\alpha) \in [0, 1]$. Assim, basta examinarmos o sinal de $\cos(\alpha)$. Sejam $p, q \in \mathbb{H}_1$, onde $p = [s, \mathbf{v}]$. Temos que

$$\begin{aligned} \cos(\alpha) &= p \cdot q_{\frac{1}{2}} && \text{(definição 3.2.10)} \\ &= p \cdot Slerp(p, q, \frac{1}{2}) \\ &= p \cdot p(p^*q)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Como $p^*, q \in \mathbb{H}_1$ segue que $p^*q \in \mathbb{H}_1$ e pela proposição 3.4.1, existem $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$, com $|\mathbf{w}| = 1$ e $\phi \in]-\pi, \pi]$ temos que $p^*q = [\cos\phi, \text{sen}\phi\mathbf{w}]$. Usando o lema 4.1.2, temos:

$$\begin{aligned} \cos(\alpha) &= p \cdot (p[\cos\phi, \text{sen}\phi\mathbf{w}]^{\frac{1}{2}}) \\ &= p \cdot (p \exp(\frac{1}{2} \log[\cos\phi, \text{sen}\phi\mathbf{w}])) \\ &= p \cdot (p \exp(\frac{1}{2}[0, \phi\mathbf{w}])) \\ &= p \cdot (p \exp([0, \frac{1}{2}\phi\mathbf{w}])) \\ &= p \cdot (p \exp(\log[\cos\frac{\phi}{2}, \text{sen}\frac{\phi}{2}\mathbf{w}])) \\ &= p \cdot p[\cos\frac{\phi}{2}, \text{sen}\frac{\phi}{2}\mathbf{w}] \\ &= p[1, \mathbf{0}] \cdot p[\cos\frac{\phi}{2}, \text{sen}\frac{\phi}{2}\mathbf{w}] \\ &= \|p\|^2 \cos\frac{\phi}{2} && \text{(lema 4.1.2)} \\ &= \cos\frac{\phi}{2} \end{aligned}$$

Agora, $\phi \in]-\pi, \pi]$ o que implica que $\cos(\frac{\phi}{2}) \geq 0$ e portanto $\cos(\alpha) \geq 0$. Logo $Slerp$ descreve o menor grande arco entre p e q . ■

Com isto, provamos a equivalência das quatro expressões para a função $Slerp$ dadas na proposição 4.1.1 e que a mesma descreve o arco desejado. Isto poderia concluir nosso tratamento sobre a função de interpolação $Slerp$. Entretanto, a literatura tem evitado o uso de exponenciação na expressão para $Slerp$. Para efeito de completude, incluímos a seguinte expressão sem exponenciação para a função $Slerp$,

que enunciamos sem provar a sua validade (para mais detalhes veja [2]):

$$\cos(\psi) = p \cdot q$$

$$Slerp(p, q, h) = \frac{p \operatorname{sen}[(1-h)\psi] + q \operatorname{sen}(h\psi)}{\operatorname{sen}(\psi)}$$

Note que esta expressão não está definida para $p = \pm q$. Neste caso é óbvio que $Slerp(p, p, h) \equiv p$.

No apêndice A incluímos um código para a implementação da função *Slerp*, escrita em linguagem C, e nas páginas a seguir temos algumas imagens produzidas com o programa *Slerp3D* (figuras 4.2, 4.3 e 4.4), que usa este código e se encontra disponível no endereço: <ftp://mat.ufpb.br/pub/mat/quat2000.zip>

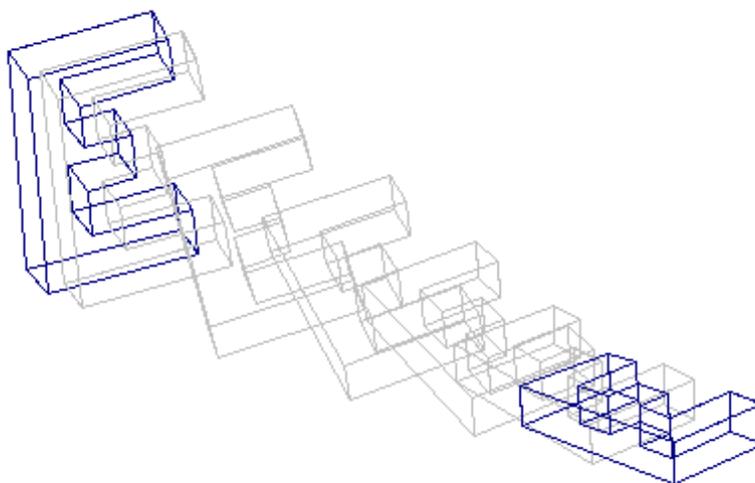


Figura 4.2: Exemplo 1: Uma interpolação com o *Slerp3d*

4.2 Interpolação entre uma Seqüência de Rotações

Quando interpolamos entre duas rotações a função *Slerp* é satisfatória. No conjunto dos quatérnios unitários a curva de interpolação da função *Slerp* é equivalente

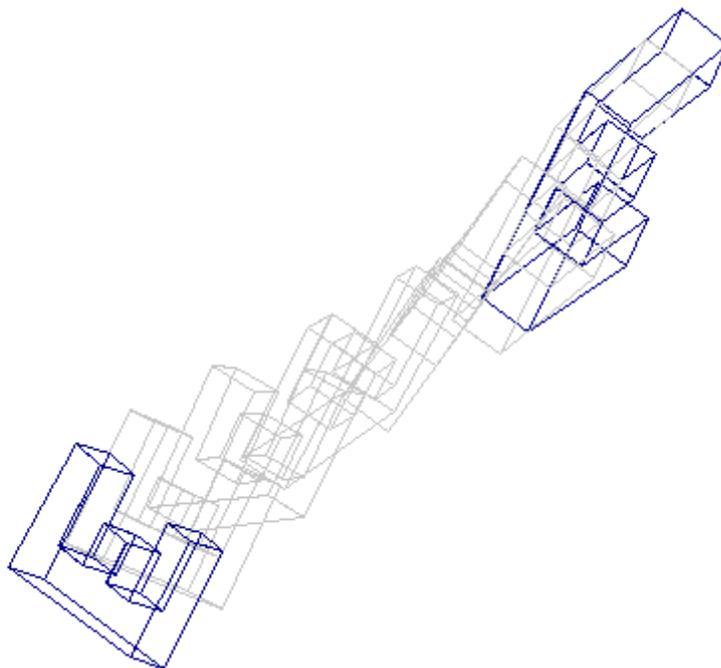


Figura 4.3: Exemplo 2: Uma interpolação com o Slerp3d

a uma linha reta (um grande arco), quando interpolamos entre uma seqüência de rotações, alguns problemas surgem, por exemplo:

- a) A curva não é suave nas *keyframes*;
- b) A velocidade angular não é constante;
- c) A velocidade angular não é contínua nas *keyframes*.

Uma reparametrização pode facilmente assegurar a continuidade através da interpolação completa. Na verdade o parâmetro da interpolação é transformado em um número discreto de *frames* entre cada par de *keyframes*. Assim, uma reparametrização corresponde a designar para cada intervalo um número de *frames* proporcional ao tamanho do intervalo. O tamanho do intervalo pode ser medido pelo ângulo θ entre cada par de *keyframes* q_i e q_{i+1} , dado por $\cos\theta = q_i \cdot q_{i+1}$.

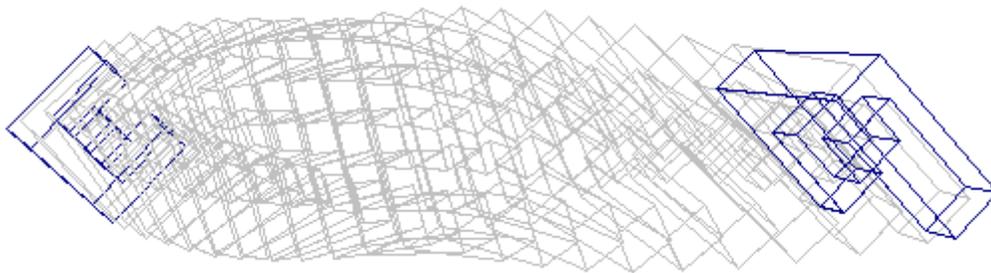


Figura 4.4: Exemplo 3: Uma interpolação com o Slerp3d

Como o número de *frames* em cada subintervalo necessariamente deve ser um inteiro, a velocidade angular está, devido aos arredondamentos, apenas aproximadamente constante.

Não é igualmente simples ajustar a falta de suavidade. Para efeito de comparação, observe que é simples interpolar entre dois pontos do plano, o que passa a ser relativamente complicado quando se passa para o espaço e sobretudo para uma série de pontos. Observada esta complicação, esta se torna ainda mais ampla quando os pontos passam a ser quatérnios, pois o espaço das rotações representado através de quatérnios é isomorfo a uma esfera unitária quadri-dimensional, algo que não é possível a visualização.

Geralmente, o que se encontra na literatura é a generalização para \mathbb{H}_1 de métodos feitos em \mathbb{R}^3 usando cúbicas de Bézier e Splines. No próximo capítulo desenvolvemos um método, que é o resultado central do nosso trabalho, usando curvas circulares sobre a superfície da esfera unitária quatérnia.

Capítulo 5

Combinando Curvas Circulares

5.1 Introdução

Neste capítulo apresentamos um método de interpolar suavemente, uma dada seqüência de orientações sólidas. Para isto, desenvolveremos inicialmente o conceito de curvas circulares, e em seguida como combiná-las de modo a conseguir uma interpolação de uma seqüência de orientações com uma certa suavidade.

5.2 Curvas Circulares em S^2

Antes de começarmos a estudar as curvas circulares de S^3 , veremos uma analogia a estas curvas em S^2 , para nossa melhor compreensão.

Considere $p_1, p_2 \in \mathbb{R}^3$ sendo pontos que estão em S^2 . Sabemos que existe um **grande círculo** C que passa pelos pontos p_1 e p_2 . O grande círculo C é a intersecção entre a esfera unitária S^2 e o plano L que contém os pontos p_1, p_2 e a origem de \mathbb{R}^3 .

O segmento do grande círculo C que conecta os pontos p_1 e p_2 e tem menor comprimento, chamaremos de **curva circular de S^2** que interpola os pontos p_1 e p_2 .

Desejamos encontrar um método analítico que possa descrever esta curva.

Para isto, encontraremos a transformação T , que leva o plano $L \subset \mathbb{R}^3$ no plano $\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3$. Como os vetores p_1 e p_2 estão sobre o plano L , segue-se que o vetor

$$n_3 = \frac{p_1 \times p_2}{\|p_1 \times p_2\|}$$

é unitário normal ao plano L . Considere o vetor

$$n_2 = n_3 \times p_1,$$

como n_2 é obtido como produto vetorial de dois vetores unitários, segue-se que n_2 também é unitário e simultaneamente ortogonal a p_1 e n_3 . Portanto os vetores p_1, n_2 e n_3 formam uma base ortonormal de \mathbb{R}^3 . Assim, definindo a correspondência:

$$\begin{aligned} T(p_1) &= e_1 \\ T(n_2) &= e_2 \\ T(n_3) &= e_3 \end{aligned} \tag{5.1}$$

obtemos uma transformação ortogonal T que leva os vetores p_1, n_2 e n_3 em e_1, e_2 e e_3 , respectivamente, ou seja, leva o plano L no plano \mathbb{R}^2 . Como C é um círculo unitário contido em L , temos que T aplica C no círculo unitário $S^1 \subset \mathbb{R}^2$. Diante dessas observações, concluímos que

$$T^{-1}(S^1) = C \tag{5.2}$$

Podemos encontrar a matriz de T^{-1} facilmente, usando as equações (5.1). Observe que

$$\begin{aligned} T^{-1}(e_1) &= p_1 \\ T^{-1}(e_2) &= n_2 \\ T^{-1}(e_3) &= n_3 \end{aligned}$$

disto segue-se que

$$[T^{-1}] = [p_1 \quad n_2 \quad n_3]$$

onde os vetores p_1, n_2 e n_3 são vistos como colunas da matriz acima. Como T é uma transformação ortogonal, segue-se que

$$\begin{aligned} T^t &= T^{-1} \Rightarrow \\ T &= (T^{-1})^t \Rightarrow \\ [T] &= [T^{-1}]^t. \end{aligned}$$

ou seja,

$$[T] = [p_1 \quad n_2 \quad n_3]^t$$

Para concluir, resta parametrizar o círculo C . Sabemos que $S^1 = \{(x, y, 0) / x, y \in \mathbb{R}, x^2 + y^2 = 1\}$, logo podemos reparametrizar S^1 da seguinte forma:

$$S^1(\theta) = (\text{sen}\theta, \text{cos}\theta, 0), \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

Então, por (3.2) temos:

$$C(\theta) = [p_1 \quad n_2 \quad n_3] \cdot \begin{bmatrix} \text{sen}\theta \\ \text{cos}\theta \\ 0 \end{bmatrix}, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

Isto, para obtermos o grande círculo C completo, se desejássemos o arco de menor comprimento que conecta p_1 e p_2 , bastaria restringirmos o domínio de C para $0 \leq \theta \leq \theta_0$, onde θ_0 é o ângulo entre p_1 e p_2 . Veja o programa Circ disponível em <ftp://mat.ufpb.br/pub/mat/quat2000.zip> para uma visualização destes fatos.

5.3 Grande Esfera em S^3

Usando um conceito análogo ao do grande círculo em S^2 visto na seção anterior, consideraremos agora, como construir uma grande esfera S que passa por três pontos dados $p_1, p_2, p_3 \in S^3$.

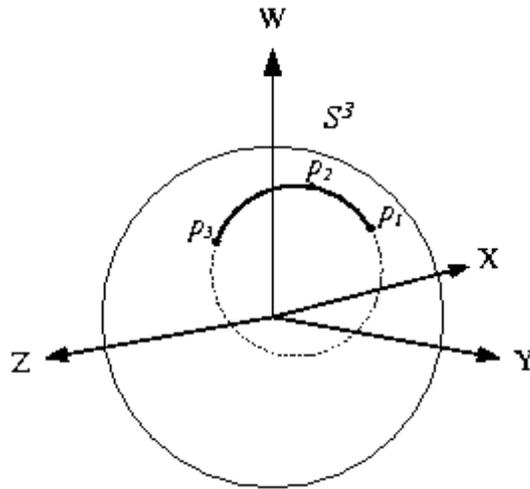


Figura 5.1: Grande Esfera em S^3

Iniciamos construindo o hiperplano L^3 que contém os pontos p_1, p_2, p_3 e a origem O de \mathbb{R}^4 . O hiperplano L^3 é definido pela equação

$$ax + by + cz + dw = 0,$$

onde o vetor (a, b, c, d) é dado pela relação

$$(a, b, c, d) = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ w_1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ w_2 & x_2 & y_2 & z_2 \\ w_3 & x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

sendo e_1, e_2, e_3 e e_4 os vetores da base canônica de \mathbb{R}^4 , e $p_i = (w_i, x_i, y_i, z_i)$, $i = 1, 2, 3$. Daqui para frente denotaremos esta relação como $p_1 \times p_2 \times p_3$, que calcula o vetor ortogonal aos vetores p_1, p_2 e p_3 simultaneamente.

Normalizando o vetor (a, b, c, d) , obtemos o vetor

$$n_4 = \frac{(a, b, c, d)}{\|(a, b, c, d)\|},$$

unitário normal ao hiperplano L^3 . Consideremos também os vetores

$$n_2 = \frac{p_3 \times n_4 \times p_1}{\|p_3 \times n_4 \times p_1\|}$$

e

$$n_3 = \frac{n_4 \times p_1 \times n_2}{\|n_4 \times p_1 \times n_2\|}.$$

Temos então, que p_1, n_2, n_3 e n_4 formam uma base ortornormal de \mathbb{R}^4 . Assim, definindo a correspondência

$$\begin{aligned} T(n_4) &= e_1 \\ T(p_1) &= e_2 \\ T(n_2) &= e_3 \\ T(n_3) &= e_4 \end{aligned} \tag{5.3}$$

obtemos uma transformação ortogonal T , que preserva orientação e que aplica o plano L^3 no plano $\mathbb{R}^3 \subset \mathbb{R}^4$, cujos pontos são da forma $(0, x, y, z)$, onde $x, y, z \in \mathbb{R}$. Através de alguns cálculos, deduzimos que a matriz de T é dada por:

$$[T] = [n_4 \ p_1 \ n_2 \ n_3]^t,$$

onde os vetores p_1, n_2, n_3 e n_4 são vistos como colunas da matriz $[T]$.

Como T é ortogonal, preserva comprimentos, logo segue-se que os pontos

$$\begin{aligned} \bar{p}_1 &= T(p_1), \\ \bar{p}_2 &= T(p_2), \\ \bar{p}_3 &= T(p_3), \end{aligned}$$

são unitários e portanto, pertencem à esfera unitária $S^2 \subset \mathbb{R}^3$. Observe que

$$\bar{p}_1 = T(p_1) = e_2 = (0, 1, 0, 0),$$

e além disso os pontos \bar{p}_1, \bar{p}_2 e \bar{p}_3 podem ser trazidos de volta para os pontos originais da transformação inversa T^{-1} , que é dada por

$$[T^{-1}] = [T]^t = [\begin{array}{cccc} n_4 & p_1 & n_2 & n_3 \end{array}],$$

onde está sendo usado novamente o fato de T ser uma transformação ortogonal.

Continuando, considere $S^{-2} = T^{-1}(S^2)$ como a imagem inversa da esfera S^2 contida na hipersfera $S^3 \subset \mathbb{R}^4$ sob a transformação T^{-1} . Assim, é fácil ver que S^{-2} é a interseção de S^3 com o hiperplano L^3 , e também que, $p_1, p_2, p_3 \in S^{-2}$.

Quando restringimos o domínio de T^{-1} aos pontos do hiperplano $\mathbb{R}^3 \subset \mathbb{R}^4$, ou seja aos pontos da forma $(0, x, y, z)$, com $x, y, z \in \mathbb{R}$, a primeira coluna de $[T^{-1}]$ é redundante, basta ver que na multiplicação

$$[T^{-1}] \circ \begin{bmatrix} 0 \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

o vetor n_4 não afetará no resultado final. Assim podemos ignorar a primeira coluna de $[T^{-1}]$ e a primeira coluna de $[T]$, e escrevemos

$$[T] = [\begin{array}{ccc} p_1 & n_2 & n_3 \end{array}]$$

e

$$[T^{-1}] = [\begin{array}{ccc} p_1 & n_2 & n_3 \end{array}]^t$$

5.4 Curvas Circulares em S^3

Os três pontos \bar{p}_1, \bar{p}_2 e $\bar{p}_3 \in S^2$ determinam um plano $L^2 \subset \mathbb{R}^3$, que não necessariamente contém a origem de \mathbb{R}^3 . A interseção do plano L^2 com a esfera S^2 determina um círculo \bar{C} que interpola os três pontos \bar{p}_1, \bar{p}_2 e $\bar{p}_3 \in S^2$.

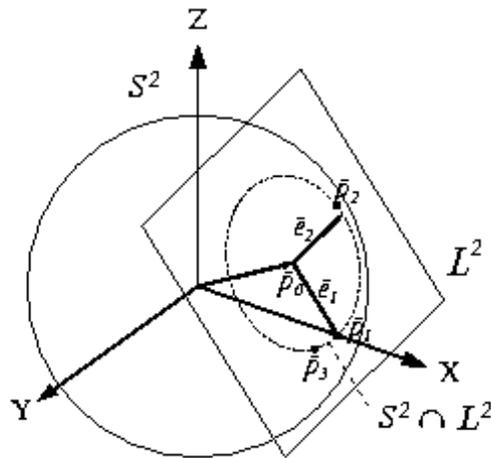


Figura 5.2: Interseção de S^2 com L^2

Concluimos assim, que a imagem inversa de \bar{C} , dada por

$$C = T^{-1}(\bar{C}),$$

gera uma curva circular que interpola os pontos $p_1, p_2, p_3 \in S^3$. Denotaremos o círculo C por $C(p_1, p_2, p_3)$. Note que os círculos C e \bar{C} não têm seus centros na origem de \mathbb{R}^4 e \mathbb{R}^3 , respectivamente.

Seja \bar{p}_0 o centro de \bar{C} . Então, o círculo \bar{C} , transladado para $\bar{C} - \bar{p}_0$, tem centro na origem de \mathbb{R}^3 e está contido no plano transladado $L^2 - \bar{p}_0$. Assim, sob a transformação inversa T^{-1} , este círculo é transformado em:

$$\begin{aligned} T^{-1}(\bar{C} - \bar{p}_0) &= T^{-1}(\bar{C}) - T^{-1}(\bar{p}_0) \\ &= C - T^{-1}(\bar{p}_0) \end{aligned}$$

ou seja,

$$C = T^{-1}(\bar{C} - \bar{p}_0) + T^{-1}(\bar{p}_0),$$

o que nos permite concluir, que para calcular a curva circular $C \subset S^3$, necessitamos apenas adicionar o vetor quadri-dimensional $T^{-1}(\bar{p}_0)$ à imagem inversa $T^{-1}(\bar{C} - \bar{p}_0)$ do círculo $\bar{C} - \bar{p}_0$, que é centrado na origem de \mathbb{R}^3 .

Considere $p_0 = T^{-1}(\bar{p}_0)$ e \bar{T} a transformação ortogonal que aplica o círculo $\bar{C} - \bar{p}_0$ num outro círculo \hat{C} contido no subspaço $\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3$, isto é no plano gerado pelos vetores $(1, 0, 0)$ e $(0, 1, 0)$, seja $E : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ a transformação que escala o círculo \hat{C} , de modo a aplicá-lo no círculo unitário $S^1 \subset \mathbb{R}^2$.

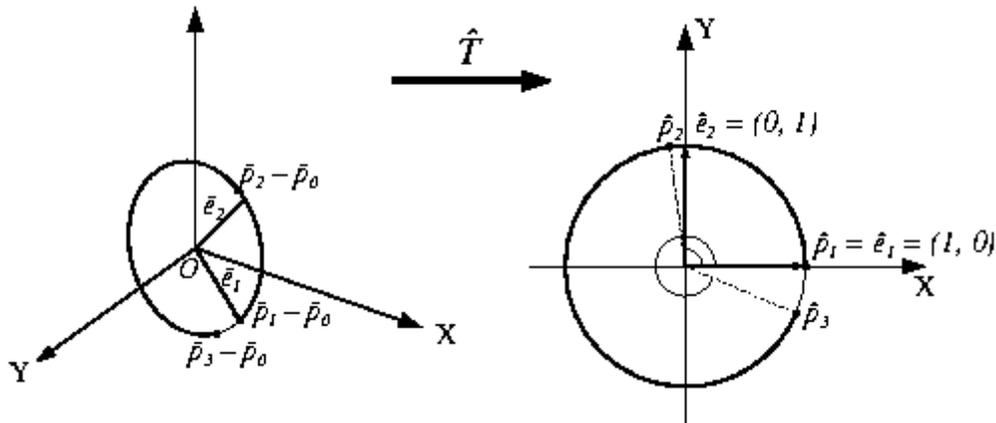


Figura 5.3: A transformação \hat{T}

Além disso considere $\hat{T} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ sendo a composição $E \circ \bar{T}$. Assim, temos que \hat{T} aplica o círculo $\bar{C} - \bar{p}_0$ no círculo unitário S^1 .

Sejam

$$\hat{p}_i = \hat{T}(\bar{p}_i - \bar{p}_0), \quad i = 1, 2, 3.$$

Observe que podemos definir \hat{T} de modo que esta aplique o vetor $\bar{p}_1 - \bar{p}_0$ no vetor bi-dimensional $\hat{p}_1 = (1, 0) \in S^1$.

Concluindo nosso raciocínio, o círculo S^1 pode ser aplicado de volta para o círculo $C(p_1, p_2, p_3)$ através da transformação

$$T^{-1} \circ \hat{T}^{-1},$$

ou melhor:

$$C(p_1, p_2, p_3)(v) = (T^{-1} \circ \bar{T}^{-1} \circ E^{-1})(v) + p_0$$

onde $v \in S^1$.

Podemos parametrizar o círculo S^1 , da seguinte forma

$$S^1 = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid v = (\cos\theta, \sin\theta, 0), 0 \leq \theta \leq 2\pi\},$$

portanto, segue-se que podemos calcular o círculo C através da seguinte expressão

$$C(p_1, p_2, p_3)(\theta) = T^{-1} \circ \bar{T}^{-1} \circ E^{-1}(\cos\theta, \sin\theta) + p_0$$

Assim, uma vez conhecida a variação angular entre os pontos \bar{p}_1 e \bar{p}_2 , digamos $[0, \theta_1]$, e entre os pontos \bar{p}_2 e \bar{p}_3 , digamos $[\theta_1, \theta_1 + \theta_2]$, quando restringirmos o domínio de C para $[0, \theta_1 + \theta_2]$ temos a curva circular quatérnia que conecta os três pontos p_1, p_2, p_3 .

Explicaremos agora como encontrar o ponto \bar{p}_0 e as transformações \bar{T} , \bar{T}^{-1} , E e E^{-1} :

Cálculo de \bar{p}_0 :

Inicialmente calculamos o vetor \bar{n}_3 normal ao plano L^2 :

$$\begin{aligned} \bar{n}_3 &= \frac{(\bar{p}_2 - \bar{p}_1) \times (\bar{p}_3 - \bar{p}_1)}{\|(\bar{p}_2 - \bar{p}_1) \times (\bar{p}_3 - \bar{p}_1)\|} \\ &= \frac{(\bar{p}_2 - (1, 0, 0)) \times (\bar{p}_3 - (1, 0, 0))}{\|(\bar{p}_2 - (1, 0, 0)) \times (\bar{p}_3 - (1, 0, 0))\|} \end{aligned}$$

suponha, então que

$$\bar{n}_3 = (a, b, c),$$

logo, o centro \bar{p}_0 do círculo \bar{C} é a interseção da reta

$$\gamma(t) = (at, bt, ct) \tag{5.4}$$

com o plano L^2 . Como o ponto $\bar{p}_1 = (1, 0, 0)$ está no plano L^2 e o vetor \bar{n}_3 é normal a este plano, temos que a equação de L^2 é dada por

$$a(x - 1) + by + cz = 0. \tag{5.5}$$

Substituindo (5.4) em (5.5) e resolvendo a equação para o parâmetro t , temos:

$$\begin{aligned} a(at - 1) + b(bt) + c(ct) &= 0 \Rightarrow \\ (a^2 + b^2 + c^2)t - a &= 0 \Rightarrow \\ t &= \frac{a}{(a^2 + b^2 + c^2)} \end{aligned}$$

e, como \bar{n}_3 é unitário, segue-se que $t = a$ e portanto

$$\bar{p}_0 = (a^2, ab, ac)$$

Cálculo de \bar{T} e \bar{T}^{-1} :

Sejam $\bar{n}_1 = \frac{\bar{p}_1 - \bar{p}_0}{\|\bar{p}_1 - \bar{p}_0\|}$ e $\bar{n}_2 = \bar{n}_3 \times \bar{n}_1$. A correspondência

$$\bar{T}(\bar{n}_1) = e_1$$

$$\bar{T}(\bar{n}_2) = e_2$$

$$\bar{T}(\bar{n}_3) = e_3$$

onde $\{e_1, e_2, e_3\}$ é a base canônica de \mathbb{R}^3 , define uma transformação ortogonal \bar{T} que aplica o plano gerado pelos vetores \bar{n}_1 e \bar{n}_2 no plano gerado pelos vetores e_1 e e_2 , isto é, leva o círculo \bar{C} num círculo \hat{C} contido no plano xy . Usando alguns conhecimentos de Álgebra Linear, temos que

$$[\bar{T}^{-1}] = [\bar{n}_1 \quad \bar{n}_2 \quad \bar{n}_3]$$

e, como \bar{T} é ortogonal, $\bar{T}^{-1} = \bar{T}^t$, o que nos dá que $\bar{T} = (\bar{T}^{-1})^t$, portanto segue-se que

$$[\bar{T}] = [\bar{n}_1 \quad \bar{n}_2 \quad \bar{n}_3]^t$$

Usando um argumento similar ao que usamos na seção anterior, podemos ignorar a última linha de \bar{T} e a última coluna de \bar{T}^{-1} , já que os pontos contidos no plano xy são da forma $(x, y, 0)$. E portanto, escrevemos

$$[\bar{T}^{-1}] = [\bar{n}_1 \quad \bar{n}_2]$$

e

$$[\bar{T}] = [\bar{n}_1 \quad \bar{n}_2]^t$$

Cálculo de E e E^{-1} :

Seja s o raio do círculo trasladado $\bar{C} - \bar{p}_0$, podemos calculá-lo da seguinte forma

$$\begin{aligned} s &= \|\bar{p}_1 - \bar{p}_0\| \\ &= \|(1, 0, 0) - (a^2, ab, ac)\| \\ &= \|(1 - a^2, -ab, -ac)\| \\ &= \sqrt{(1 - a^2)^2 + a^2b^2 + a^2c^2} \end{aligned}$$

sendo assim a transformação E que escala o círculo \hat{C} , de modo a fazê-lo coincidir com o círculo unitário S^1 , é dada por

$$E = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s} \end{bmatrix}$$

e sua inversa por

$$E^{-1} = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix}$$

5.5 Parametrização de Curvas Circulares

Seja $C_i(\theta)$ uma curva circular que passa pelos quatérnios q_{i-1}, q_i, q_{i+1} . Nesta seção estamos interessados em encontrar uma parametrização $\theta(t)$ para $C_i(\theta)$, de modo que $C_i(\theta(t))$ passe pelos quatérnios q_{i-1}, q_i, q_{i+1} nos instantes t_{i-1}, t_i, t_{i+1} , respectivamente.

Sejam C_{i1} e C_{i2} os subsegmentos de C_i que conectam os quatérnios q_{i-1} a q_i e q_i a q_{i+1} , respectivamente. Suponha também que o domínio de C_{i1} seja o intervalo $[0, \theta_{i1}]$

e o domínio de C_{i2} seja o intervalo $[\theta_{i1}, \theta_{i1} + \theta_{i2}]$. Em outras palavras, domínio de C_i será o intervalo $[0, \theta_{i1} + \theta_{i2}]$.

Podemos reescalonar os domínios de C_{i1} e C_{i2} , sendo então permitido assumir que

$$0 < \theta_{i1} < \theta_{i1} + \theta_{i2} = 1,$$

bastando para isso considerar a reparametrização de $C_i(\theta)$ dada por

$$\begin{aligned} h : [0, 1] &\rightarrow [0, \theta_{i1} + \theta_{i2}] \\ t &\mapsto (\theta_{i1} + \theta_{i2}) \cdot t \end{aligned}$$

e em seguida trocar a variável t por θ novamente. Assim, temos que a função $\theta(t)$ que procuramos terá o seguinte protótipo:

$$\theta : [t_{i-1}, t_{i+1}] \rightarrow [0, 1]$$

Do mesmo modo podemos, de antemão, reparametrizar θ , de forma que

$$0 = t_{i-1} < t < t_{i+1} = 1$$

ou seja,

$$\theta : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$$

Quando subdividimos os domínios de C_{i1} e C_{i2} em m_{i1} e m_{i2} subsegmentos, respectivamente, uma função $\theta(t)$ estritamente crescente, para $0 \leq t \leq 1$, que satisfaz as condições

$$\begin{cases} \theta(0) = 0 \\ \theta(t_i) = \theta_i \\ \theta(1) = 1 \end{cases} \quad (5.6)$$

pode ser dada por

$$\theta(t) = t^\alpha$$

onde a constante $\alpha > 0$ é determinada pela condição

$$\theta(t_i) = \theta_i$$

pois, pela subdivisão dos domínios de C_{i1} e C_{i2} acima citada,

$$t_i = \frac{m_{i1}}{m_{i1} + m_{i2}},$$

e portanto segue-se que

$$\theta\left(\frac{m_{i1}}{m_{i1} + m_{i2}}\right) = \theta_i \quad \Rightarrow$$

$$\left(\frac{m_{i1}}{m_{i1} + m_{i2}}\right)^\alpha = \theta_i \quad \Rightarrow$$

$$\alpha \ln\left(\frac{m_{i1}}{m_{i1} + m_{i2}}\right) = \ln \theta_i \quad \Rightarrow$$

$$\alpha = \frac{\ln \theta_i}{\ln m_{i1} - \ln(m_{i1} + m_{i2})}$$

Computacionalmente falando, observe que o cálculo de $\theta(t) = t^\alpha$, é feito da seguinte maneira

$$\theta(t) = \exp(\alpha \ln t),$$

o que implica o cálculo do logaritmo e da exponencial para $m_{i1} + m_{i2}$ diferentes valores de t , ocasionando um custo caro para o computador, visto que o cálculo de logaritmos e exponenciais são completamente extensivos. Tentaremos deduzir uma função $\theta(t)$ que seja polinomial e de grau baixo: 2 ou 3.

Consideremos a polinomial quadrática

$$\theta(t) = at^2 + bt + c$$

satisfazendo as condições (5.6). Resolvendo temos

$$\begin{cases} c = 0 \\ a + b = 1 \end{cases}$$

e

$$\begin{aligned} \theta_{i1} &= \theta(t_i) \\ &= at_i^2 + bt_i + c \\ &= at_i^2 + (1 - a)t_i \\ &= (t_i^2 - t_i)a + t_i \end{aligned}$$

Conseqüentemente,

$$a = \frac{\theta_{i1} - t_i}{t_i^2 - t_i}$$

(no caso degenerado de $a = 0$, isto é $\theta_{i1} = t_i$, a função polinomial $\theta(t)$ torna-se linear: $\theta(t) = t$).

A polinomial

$$\theta(t) = at^2 + (1 - a)t$$

tem derivada

$$\theta'(t) = 2at + (1 - a),$$

logo, para que $\theta(t)$ seja estritamente crescente no intervalo $(0, 1)$, a raiz de $\theta'(t)$, que é um ponto crítico de $\theta(t)$, não pode estar no intervalo $[0, 1]$, ou seja

$$\frac{a - 1}{2a} \leq 0 \quad \text{ou} \quad \frac{a - 1}{2a} \geq 1.$$

ou equivalentemente

$$\frac{a - 1}{2a} = \frac{\theta_{i1} - t_i^2}{2(\theta_{i1} - t_i)} \leq 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\theta_{i1} - t_i^2}{2(\theta_{i1} - t_i)} \geq 1$$

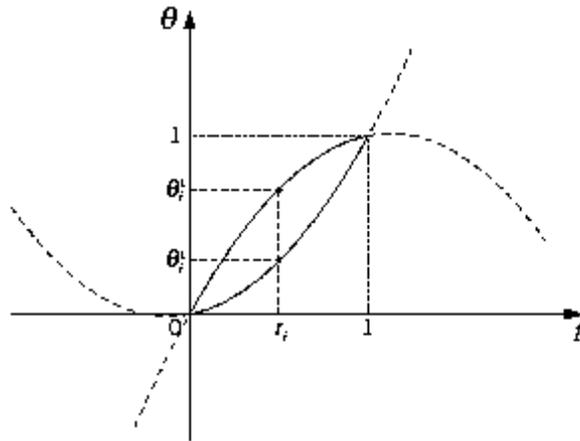


Figura 5.4: Polinomial quadrática

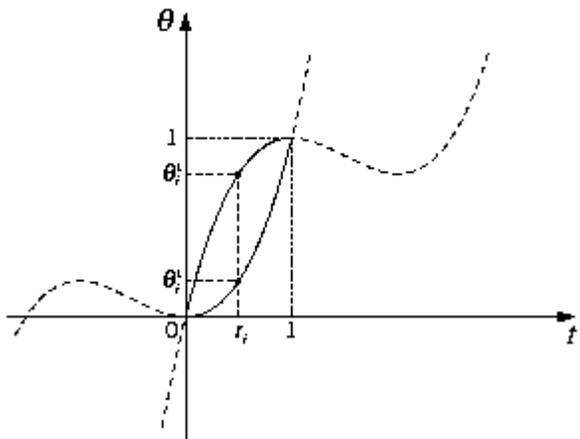


Figura 5.5: Polinomial cúbica

Resolvendo estas inequações, temos

$$t_i^2 \leq \theta_{i1} \leq 2t_i - t_i^2.$$

Concluimos então, que a função polinomial quadrática

$$\theta(t) = at^2 + (1 - a)t$$

com

$$a = \frac{\theta_{i1} - t_i}{t_i^2 - t_i},$$

só pode ser usada como parametrização da curva $C_i(\theta)$, quando

$$t_i^2 \leq \theta_{i1} \leq 2t_i - t_i^2.$$

Analisemos agora a função polinomial cúbica¹

$$\theta(t) = at^3 + (1 - a)t^2$$

onde a é tal que θ satisfaz as equações (5.6), ou seja

$$a = \frac{\theta_{i1} - t_i^2}{t_i^3 - t_i^2},$$

Para que θ seja estritamente crescente, a raiz de sua segunda derivada

$$\theta''(t) = 6at + 2(1 - a),$$

deve ser menor ou igual a zero, visto que, geometricamente, esta significa um ponto de inflexão. Portanto devemos ter

$$\frac{a - 1}{3a} \leq 0,$$

ou equivalentemente,

$$\frac{a - 1}{3a} = \frac{\theta_{i1} - t_i^3}{3(\theta_{i1} - t_i^2)} \leq 0.$$

Resolvendo temos

$$t_i^3 \leq \theta_{i1} \leq t_i^2,$$

portanto, quando θ_{i1} for tal que $t_i^3 \leq \theta_{i1} \leq t_i^2$, a função polinomial cúbica $\theta(t)$ pode ser usada como parametrização da curva circular $C_i(\theta)$.

Analisemos agora uma outra polinomial cúbica:

$$\theta(t) = a(t - 1)^3 + (a - 1)(t - 1)^2 + 1$$

¹Observe que apenas multiplicamos a função quadrática por t .

Esta função foi obtida a partir da cúbica anterior, através de uma reflexão em torno do eixo x , seguida por outra reflexão em torno do eixo y , e por fim de uma translação pelo vetor $(-1, 1)$. É fácil ver que

$$\theta(0) = 0$$

$$\theta(1) = 1$$

Para a função θ ser estritamente crescente e satisfazer a condição

$$\theta(t_i) = \theta_{i1}$$

devemos ter,

$$2t_i - t_i^2 < \theta_{i1} < 2t_i - t_i^3.$$

Este resultado pode ser obtido da mesma forma como fizemos para as funções anteriores.

Podemos continuar o mesmo procedimento² para obter funções polinomiais de grau mais alto; entretanto, os casos em que $0 < \theta_{i1} < t_i^3$ ou $2t_i - t_i^3 < \theta_{i1} < 1$ são muito raros e para estes casos, podemos usar a função exponencial $\theta(t) = t^\alpha$ sem afetar significativamente o desempenho geral do algoritmo.

5.5.1 Casos Degenerados

Na discussão acima, temos assumido que

$$0 < \theta_{i1} < 1,$$

isto é, não existem orientações consecutivas idênticas; entretanto, também é fácil lidar com os casos degenerados em que $q_{i-1} = q_i$ ou $q_i = q_{i+1}$. Nestes casos, a curva circular quaternária que interpola os três pontos q_{i-1}, q_i, q_{i+1} , pode ser facilmente

²O procedimento é: multiplicar por t a última função encontrada para obter outra função θ de grau maior e também usar a simetria de θ .

construída através do arco circular geodésico (**Slerp**) que conecta os pontos $q_{i-1} = q_i$ a q_{i+1} ou q_{i-1} a $q_i = q_{i+1}$.

Quando q_{i-1} e q_i são idênticos, $\theta_{i1} = 0$. Não existe função polinomial monotônica crescente $\theta(t)$ com

$$\begin{cases} \theta(0) = 0 \\ \theta(t_i) = 0 \\ \theta(1) = 1 \end{cases} \quad (5.7)$$

Assim, definimos a função contínua por partes

$$\theta(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } 0 \leq t \leq t_i \\ \left(\frac{t-t_i}{1-t_i}\right)^{k+1} & \text{se } t_i < t \leq 1 \end{cases}$$

para algum inteiro positivo k . A função $\theta(t)$ satisfaz as condições (5.7) e além do mais, $\theta(t)$ é C^k - contínua em $t = t_i$.

Analogamente, quando q_i e q_{i+1} são idênticas, $\theta_{i1} = 1$. Para as condições

$$\begin{cases} \theta(0) = 0 \\ \theta(t_i) = 1 \\ \theta(1) = 1 \end{cases} \quad (5.8)$$

podemos definir a função contínua por partes e monotônica

$$\theta(t) = \begin{cases} \left(\frac{t}{t_i}\right)^{k+1}, & \text{se } 0 \leq t \leq t_i \\ 0, & \text{se } t_i < t \leq 1 \end{cases}$$

para algum inteiro positivo k . A função $\theta(t)$ também é C^k - contínua em $t = t_i$.

5.5.2 Suavidade da Curva Circular

Agora, consideraremos a suavidade de $C_i(t) = C_i(\theta(t))$. A curva $C_i(\theta)$ é infinitamente diferenciável com respeito ao parâmetro θ pois C_i , como já vimos, é dada

por

$$C_i(\theta) = T^{-1} \circ \bar{T}^{-1} \circ S^{-1} \circ [\cos\theta \quad \text{sen}\theta]^t + p_0,$$

onde $T^{-1}, \bar{T}^{-1}, S^{-1}$ são transformações lineares e p_0 um vetor $3D$, construídos na seção 5.4. Portanto a suavidade de $C_i(\theta) \equiv C_i(\theta(t))$ depende da suavidade de $\theta(t)$.

Quando a função $\theta(t)$ é exponencial, quadrática ou cúbica, esta é infinitamente diferenciável com respeito a t , assim $C_i(t)$ também é C^∞ . Quando $\theta(t)$ é uma das funções polinomiais C^k -contínuas por partes, $C_i(t)$ também é C^k -contínua. Assim, a curva C_i que interpola os quatérnios q_{i-1}, q_i, q_{i+1} , é C^k -contínua na pior das hipóteses. ■

5.6 Curva Circular Quatérnia em $SO(3)$

A curva circular $C = C(p_1, p_2, p_3)$ em S^3 gera uma curva similar $QC(p_1, p_2, p_3)$ em $SO(3)$ sob a projeção que identifica cada par de pontos antipodais em S^3 com um único ponto em $SO(3)$ (lembre-se que os quatérnios q e $-q$ representam a mesma rotação).

Dadas três orientações³ $R_{q_1}, R_{q_2}, R_{q_3} \in SO(3)$, existem três pares de pontos, $[q_1, -q_1], [q_2, -q_2], [q_3, -q_3]$, em S^3 que são identificados com $R_{q_1}, R_{q_2}, R_{q_3}$, respectivamente. Existe um total de oito seqüências de três pontos diferentes $(\pm q_1, \pm q_2, \pm q_3)$ em S^3 , cada seqüência gera uma curva $C(\pm q_1, \pm q_2, \pm q_3)$ em S^3 . Entre as oito curvas em S^3 , existem quatro que são antipodais, ou seja, cada par pode ser identificado com uma única curva em $SO(3)$. Por exemplo, o par de curvas antipodais $C(q_1, q_2, q_3)$ e $C(-q_1, -q_2, -q_3)$ em S^3 representa a mesma curva em $SO(3)$.

³rotações tomadas em relação a uma posição de referência.

Assim, podemos assumir que as quatro curvas circulares em $SO(3)$ são da forma $QC(q_1, \pm q_2, \pm q_3)$ em $SO(3)$. Para o propósito de interpolação das três orientações $R_{q_1}, R_{q_2}, R_{q_3}$ em $SO(3)$ podemos usar qualquer uma das curvas circulares $QC(q_1, \pm q_2, \pm q_3)$ em $SO(3)$. Uma escolha natural, que funciona bem na maioria das aplicações é tomar a curva circular que tem o menor comprimento de arco; entretanto, em algumas situações, dependendo do propósito da animação pode ser melhor uma das outras curvas circulares.

5.7 Combinando Curvas Circulares em S^3

Seja $\{q_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ uma seqüência de rotações representadas por quatérnios unitários. Considere $C_i(q_{i-1}, q_i, q_{i+1})$ sendo a curva circular quatérnia que interpola os quatérnios q_{i-1}, q_i, q_{i+1} , nos instantes t_{i-1}, t_i, t_{i+1} respectivamente e, analogamente, $C_{i+1}(q_i, q_{i+1}, q_{i+2})$ a curva circular que interpola os quatérnios q_i, q_{i+1}, q_{i+2} , nos instantes t_i, t_{i+1}, t_{i+2} respectivamente (veja figura 5.6).

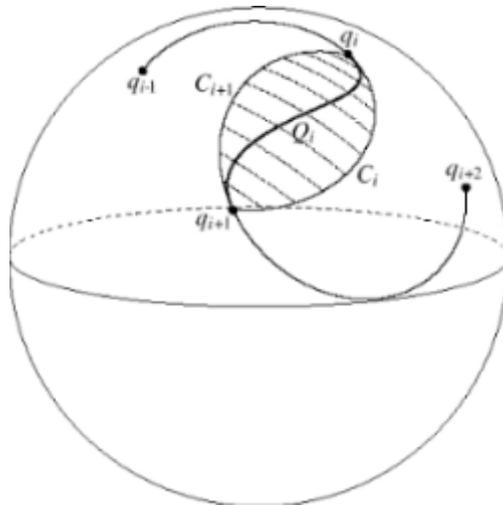


Figura 5.6: Combinação de Curvas Circulares em S^3

Dadas estas considerações, temos que

$$\begin{aligned} C_i(t_i) &= C_{i+1}(t_i) = q_i \\ C_i(t_{i+1}) &= C_{i+1}(t_{i+1}) = q_{i+1} \end{aligned} \quad (5.9)$$

Nesta seção estamos interessados em obter uma curva que combine as curvas C_i e C_{i+1} quando $t_i \leq t \leq t_{i+1}$. Para este propósito definimos a seguinte função:

$$Q_i(t) = Slerp(C_i(t), C_{i+1}(t), f(t))$$

onde f é uma função real crescente que obedece as seguintes condições

$$\begin{aligned} f(t_i) &= 0 \\ f(t_{i+1}) &= 1 \\ f^{(j)}(t_i) &= 0 \\ f^{(j)}(t_{i+1}) &= 0 \end{aligned} \quad (5.10)$$

e $j = 1, \dots, k$ com $k \in \mathbb{N}$. Desejamos mostrar que a curva Q_i assim definida, passa pelos quatérnios q_i e q_{i+1} e que sua derivada coincide com a derivada de C_i em q_i e de C_{i+1} em q_{i+1} , até a ordem k , sendo portanto uma curva contínua e bastante suave, dependendo do valor de k . Em outras palavras desejamos mostrar que

$$Q_i(t_i) = C_i(t_i) \quad (5.11)$$

$$Q_i(t_{i+1}) = C_{i+1}(t_{i+1}) \quad (5.12)$$

$$Q_i^{(j)}(t_i) = C_i^{(j)}(t_i) \quad (5.13)$$

$$Q_i^{(j)}(t_{i+1}) = C_{i+1}^{(j)}(t_{i+1}) \quad (5.14)$$

com $j = 1, \dots, k$.

Usando a definição da função *Slerp*, podemos mostrar as condições 5.11 e 5.12 com facilidade, veja:

$$\begin{aligned} Q_i(t_i) &= \text{Slerp}(C_i(t_i), C_{i+1}(t_i), f(t_i)) \\ &= \text{Slerp}(C_i(t_i), C_{i+1}(t_i), 0) \\ &= C_i(t_i) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} Q_i(t_{i+1}) &= \text{Slerp}(C_i(t_{i+1}), C_{i+1}(t_{i+1}), f(t_{i+1})) \\ &= \text{Slerp}(C_i(t_{i+1}), C_{i+1}(t_{i+1}), 1) \\ &= C_{i+1}(t_{i+1}) \\ &= C_i(t_{i+1}) \end{aligned}$$

Para mostrar as condições 5.13 e 5.14, vamos precisar de algumas deduções. Vamos começar reescrevendo a expressão de $Q_i(t)$:

$$\begin{aligned} Q_i(t) &= \text{Slerp}(C_i(t), C_{i+1}(t), f(t)) \\ &= C_i(t) (C_i^*(t)C_{i+1}(t))^{f(t)} \\ &= C_i(t) \exp(f(t) \log(C_i^*(t)C_{i+1}(t))), \end{aligned} \tag{5.15}$$

como $C_i^*(t), C_{i+1}(t) \in H_1$, segue-se que $C_i^*(t)C_{i+1}(t) \in H_1$, e pela proposição 3.4.1, existem $\theta(t) \in]-\pi, \pi]$ e $\mathbf{v}(t) \in \mathbb{R}^3$, com $|\mathbf{v}(t)| = 1$, tal que

$$C_i^*(t)C_{i+1}(t) = [\cos\theta(t), \text{sen}\theta(t)\mathbf{v}(t)] \tag{5.16}$$

Observe que $\theta(t)$ representa o ângulo entre os quatérnios $C_i(t)$ e $C_{i+1}(t)$ para $t_i \leq t \leq t_{i+1}$ pois, considerando

$$\begin{aligned} C_i(t) &= [s_i, (x_i, y_i, z_i)] \\ C_{i+1}(t) &= [s_{i+1}, (x_{i+1}, y_{i+1}, z_{i+1})] \end{aligned}$$

onde s_j, x_j, y_j, z_j^4 , $j = i, i + 1$; segue-se que

$$C_i^*(t) = [s_i, -(x_i, y_i, z_i)]$$

⁴Para ser mais exato, s_j, x_j, y_j, z_j , $j = i, i + 1$ são na verdade funções reais do parâmetro t , com $t_i \leq t \leq t_{i+1}$, mas estamos evitando o parâmetro para efeito de simplificação dos cálculos.

Usando a definição da multiplicação de quatérnios, temos que

$$C_i^*(t)C_{i+1}(t) = [s_i s_{i+1} + x_i x_{i+1} + y_i y_{i+1} + z_i z_{i+1}, \mathbf{u}], \quad (5.17)$$

onde $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ e não nos interessa nesta demonstração. Logo, por 5.17 e 5.16, temos que

$$\begin{aligned} \cos\theta(t) &= s_i s_{i+1} + x_i x_{i+1} + y_i y_{i+1} + z_i z_{i+1} \\ &= C_i(t) \cdot C_{i+1}(t), \end{aligned}$$

Chamando de $\alpha(t)$ o ângulo entre os quatérnios $C_i(t)$ e $C_{i+1}(t)$, já sabemos pelos resultados obtidos nos capítulos anteriores que,

$$\begin{aligned} \cos\alpha(t) &= C_i(t) \cdot C_{i+1}(t) \\ &= \cos\theta(t) \end{aligned}$$

Portanto, $\alpha(t) = \theta(t)$, como havíamos observado.

Usando 5.16 em 5.15, obtemos a seguinte expressão

$$\begin{aligned} Q_i(t) &= C_i(t) \exp(f(t) \log[\cos\theta(t), \text{sen}\theta(t)\mathbf{v}(t)]) \\ &= C_i(t) \exp(f(t)[0, \theta(t)\mathbf{v}(t)]) \\ &= C_i(t) \exp([0, f(t)\theta(t)\mathbf{v}(t)]) \\ &= C_i(t) \exp(\log[\cos(f(t)\theta(t)), \text{sen}(f(t)\theta(t))\mathbf{v}(t)]) \\ &= C_i(t) [\cos(f(t)\theta(t)), \text{sen}(f(t)\theta(t))\mathbf{v}(t)] \end{aligned} \quad (5.18)$$

Com esta nova expressão para $Q_i(t)$, considere $h(t) = \theta(t)f(t)$, usando a regra do produto para derivação, temos que

$$h^{(j)}(t) = \sum_{i=0}^j \binom{j}{i} \theta^{(j-i)}(t) f^{(i)}(t)$$

e usando as condições para a função f dadas em 5.10, temos que

$$\begin{aligned} h^{(j)}(t_i) &= 0, \quad j = 0, \dots, k \\ h^{(j)}(t_{i+1}) &= 0, \quad j = 0, \dots, k \end{aligned}$$

Iniciamos a demonstração de 5.13, calculando a derivada da expressão entre colchetes na eq. 5.18:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}[\cos(h(t)), \text{sen}(h(t))\mathbf{v}(t)] &= [-h'(t)\text{sen}(h(t)), h'(t)\cos(h(t))\mathbf{v}(t) \\ &\quad + \text{sen}(h(t))\mathbf{v}'(t)] + \\ &= h'(t)[- \text{sen}(h(t)), \cos(h(t))\mathbf{v}(t)] + \\ &\quad + \text{sen}(h(t))[0, \mathbf{v}'(t)] \end{aligned}$$

Usando este resultado para calcularmos a j -ésima derivada da mesma expressão, temos

$$\begin{aligned} \frac{d^{(j)}}{dt^j}[\cos(h(t)), \text{sen}(h(t))\mathbf{v}(t)] &= \frac{d^{j-1}}{dt^{j-1}}\{h'(t)[- \text{sen}(h(t)), \cos(h(t))\mathbf{v}(t)] + \\ &\quad + \text{sen}(h(t))[0, \mathbf{v}'(t)]\} \\ &= \frac{d^{j-1}}{dt^{j-1}}\{h'(t)[- \text{sen}(h(t)), \cos(h(t))\mathbf{v}(t)]\} + \\ &\quad + \frac{d^{j-1}}{dt^{j-1}}\{\text{sen}(h(t))[0, \mathbf{v}'(t)]\} \\ &= \sum_{s=0}^{j-1} \binom{j-1}{s} (h'(t))^{(j-1-s)} [- \text{sen}(h(t)), \cos(h(t))\mathbf{v}(t)]^{(s)} + \\ &\quad + \sum_{s=0}^{j-1} \binom{j-1}{s} (\text{sen}(h(t)))^{(j-1-s)} [0, \mathbf{v}'(t)]^{(s)} \end{aligned} \tag{5.19}$$

por fim, calculemos a derivada n -ésima da expressão $\text{sen}(h(t))$ que aparece na eq.5.19:

$$\begin{aligned} \frac{d^n}{dt^n}(\text{sen}(h(t))) &= \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} \left(\frac{d}{dt} \text{sen}(h(t)) \right) \\ &= \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} (h'(t)\cos(h(t))) \\ &= \sum_{s=0}^{n-1} \binom{n-1}{s} (h'(t))^{(n-1-s)} (\cos(h(t)))^{(s)} \\ &= \sum_{s=0}^{n-1} \binom{n-1}{s} (h(t))^{(n-s)} (\cos(h(t)))^{(s)} \end{aligned}$$

Agora, fazendo $t = t_i$, temos

$$\begin{aligned} \frac{d^n}{dt^n}(\text{sen}(h(t_i))) &= \sum_{s=0}^{n-1} \binom{n-1}{s} (h(t_i))^{(n-s)} (\cos(h(t_i)))^{(s)} \\ &= \sum_{s=0}^{n-1} \binom{n-1}{s} (0)^{(n-s)} (\cos(h(t_i)))^{(s)} \\ &= 0 \end{aligned} \tag{5.20}$$

e, da mesma forma, fazendo $t = t_i$ e usando 5.20 na eq.5.19 , obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{d^{(j)}}{dt^j}[\cos(h(t_i)), \text{sen}(h(t_i))\mathbf{v}(t_i)] &= \sum_{s=0}^{j-1} \binom{j-1}{s} (h'(t_i))^{(j-1-s)} [-\text{sen}(h(t_i)), \cos(h(t_i))\mathbf{v}(t_i)]^{(s)} + \\
&\quad + \sum_{s=0}^{j-1} \binom{j-1}{s} (\text{sen}(h(t_i)))^{(j-1-s)} [0, \mathbf{v}'(t_i)]^{(s)} \\
&= \sum_{s=0}^{j-1} \binom{j-1}{s} (0)^{(j-1-s)} [-\text{sen}(0), \cos(0)\mathbf{v}(t_i)]^{(s)} + \\
&\quad + \sum_{s=0}^{j-1} \binom{j-1}{s} (0) [0, \mathbf{v}'(t_i)]^{(s)} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Agora estamos prontos para diferenciar a expressão completa de $Q_i(t)$:

$$\begin{aligned}
Q_i^{(j)}(t) &= \sum_{s=0}^j \binom{j}{s} C_i^{(j-s)}(t) \frac{d^{j-s}}{dt^{j-s}} [\cos(h(t)), \text{sen}(h(t))\mathbf{v}(t)] \\
&= C_i^{(j)}(t) [\cos(h(t)), \text{sen}(h(t))\mathbf{v}(t)] + \\
&\quad + \sum_{s=1}^j \binom{j}{s} C_i^{(j-s)}(t) \frac{d^{j-s}}{dt^{j-s}} [\cos(h(t)), \text{sen}(h(t))\mathbf{v}(t)]
\end{aligned}$$

logo, calculando em $t = t_i$ e usando as deduções feitas anteriormente, temos

$$\begin{aligned}
Q_i^{(j)}(t_i) &= C_i^{(j)}(t_i) [\cos(h(t_i)), \text{sen}(h(t_i))\mathbf{v}(t_i)] + \\
&\quad + \sum_{s=1}^j \binom{j}{s} C_i^{(j-s)}(t_i) \frac{d^{j-s}}{dt^{j-s}} [\cos(h(t_i)), \text{sen}(h(t_i))\mathbf{v}(t_i)] \\
&= C_i^{(j)}(t_i) [\cos(0), \text{sen}(0)\mathbf{v}(t_i)] + \sum_{s=1}^j \binom{j}{s} C_i^{(j-s)}(t_i) (0) \\
&= C_i^{(j)}(t_i) [1, \mathbf{0}] + [0, \mathbf{0}] \\
&= C_i^{(j)}(t_i)
\end{aligned}$$

para $j = 1, \dots, k$. Assim temos provado a eq. 5.13.

Para a prova de 5.14, usaremos o fato de que

$$\begin{aligned}
Q_i(t_{i+1}) &= \text{Slerp}(C_i(t_{i+1}), C_{i+1}(t_{i+1}), f(t)) \\
&= \text{Slerp}(C_{+1i}(t_{i+1}), C_i(t_{i+1}), 1 - f(t))
\end{aligned}$$

e procedemos de forma análoga ao que foi visto para a prova de 5.13.

Capítulo 6

Conclusões

Temos descrito um eficiente algoritmo para construir uma curva circular quatérnia que interpola uma dada tripla (q_{i-1}, q_i, q_{i+1}) de orientações sólidas. Usando um método puramente analítico construímos um segmento de curva quatérnia Q_i que interpola as duas orientações q_i e q_{i+1} enquanto combina suavemente as duas curvas circulares quatérnias C_i e C_{i+1} . Conectando os segmentos de curva quatérnia Q_i 's em uma seqüência conexa, construímos um caminho quatérnio C^k -contínuo em $SO(3)$, que interpola suavemente a dada seqüência de orientações sólidas.

O método de combinação circular apresentado neste trabalho tem relativas vantagens sobre os outros métodos existentes (veja [15], [10],[11],[14],[18]), são elas:

- É simples e computacionalmente eficiente;
- Não existe grande aceleração angular ou torque na junção de dois segmentos de curva;
- O caminho interpola a seqüência dada de *keyframes*;
- Pode gerar um número arbitrário de *frames* interpolantes;

- A curva gerada é C^k -contínua;
- Somente uma construção *Slerp* é usada para a construção de uma curva $Q_i(t)$; isto simplifica enormemente a computação das propriedades diferenciais de uma curva quatérnia.

Apêndice A

Códigos Fontes

Apresentamos a seguir as principais funções utilizadas para gerar as figuras 4.2,4.3,4.4. A sintaxe é a da linguagem de programação “C”.

Um quatérnio é representado pela seguinte estrutura:

```
typedef struct {float w,x,y,z;} Quat;
```

A.1 Produto de Quatérnios

```
void MultQuat (Quat q1, Quat q2, Quat *res) {  
    float A,B,C,D,E,F,G,H,W,X,Y,Z;  
  
    A = (q1.w + q1.x)*(q2.w + q2.x); // 2 adicoes e 1 produto  
    B = (q1.z - q1.y)*(q2.y - q2.z); // 2 adicoes e 1 produto  
    C = (q1.x - q1.w)*(q2.y + q2.z); // 2 adicoes e 1 produto  
    D = (q1.y + q1.z)*(q2.x - q2.w); // 2 adicoes e 1 produto  
    E = (q1.x + q1.z)*(q2.x + q2.y); // 2 adicoes e 1 produto
```

```

F = (q1.x - q1.z)*(q2.x - q2.y); // 2 adicoes e 1 produto
G = (q1.w + q1.y)*(q2.w - q2.z); // 2 adicoes e 1 produto
H = (q1.w - q1.y)*(q2.w + q2.z); // 2 adicoes e 1 produto

W = B + 0.5*(-E - F + G + H); // 4 adicoes e 1 produto
X = A - 0.5*( E + F + G + H); // 4 adicoes e 1 produto
Y = -C + 0.5*( E - F + G - H); // 4 adicoes e 1 produto
Z = -D + 0.5*( E - F - G + H); // 4 adicoes e 1 produto

res->w = W;
res->x = X;
res->y = Y;
res->z = Z;
}

```

Podemos observar nesta função o total de 32 adições e 12 produtos necessários para multiplicar dois quatérnios.

A.2 Código para conversão de Matriz 4×4 para Quatérnio

```

Mat_to_Quat(float m[4][4], Quat *quat)
{
    float tr, s, q[4];
    int i,j,k;

```

```
int nxt[3] = {1,2,0};

tr = m[0][0] + m[1][1] + m[2][2];
if(tr > 0.0) {
    s = sqrt(tr + 1);
    quat->w = s*0.5;
    s = 0.5/s;
    quat->x = (m[1][2] - m[2][1])*s;
    quat->y = (m[2][0] - m[0][2])*s;
    quat->z = (m[0][1] - m[1][0])*s;
}else{
    i=0;
    if(m[1][1] > m[0][0]) i=1;
    if(m[2][2] > m[i][i]) i=2;
    j = nxt[i];
    k = nxt[j];

    s = sqrt( (m[i][i] - (m[j][j] + m[k][k])) ) +1.0 );
    q[i] = s*0.5;
    if(s != 0.0) s = 0.5/s;

    q[3] = (m[j][k] - m[k][j])*s;
    q[j] = (m[i][j] + m[j][i])*s;
    q[k] = (m[i][k] + m[k][i])*s;
```

```
    quat->x = q[0];
    quat->y = q[1];
    quat->z = q[2];
    quat->w = q[3];
}
}
```

Esta função usa matrizes 4×4 como parâmetro, porque desta forma generaliza-se para as matrizes homogêneas, que são geralmente usadas para representar rotações em \mathbb{R}^3 pelo fato de também poderem representar transformações tridimensionais não-lineares.

A.3 Código para conversão de Quatérnio para Matriz 4×4

```
Quat_to_Matriz(Quat *quat, float m[4][4])
{
    float wx,wy,wz,xx,yy,yz,xy,xz,zz,x2,y2,z2;

    x2 = quat->x + quat->x;
    y2 = quat->y + quat->y;
    z2 = quat->z + quat->z;

    xx = quat->x*x2;
```

```
xy = quat->x*y2;
xz = quat->x*z2;

yy = quat->y*y2;
yz = quat->y*z2;

zz = quat->z*z2;

wx = quat->w*x2;
wy = quat->w*y2;
wz = quat->w*z2;

m[0][0] = 1.0 - (yy + zz);    m[0][1] = xy - wz;
m[0][2] = xz + wy;          m[0][3] = 0.0;

m[1][0] = xy + wz;          m[1][1] = 1.0 - (xx + zz);
m[1][2] = yz - wx;          m[1][3] = 0.0;

m[2][0] = xz - wy;          m[2][1] = yz + wx;
m[2][2] = 1.0 - (xx + yy);  m[2][3] = 0.0;

m[3][0] = 0.0;              m[3][1] = 0;
m[3][2] = 0.0;              m[3][3] = 1;
}
```

A.4 Código para conversão de Ângulos de Euler para Quatérnio

```
Euler_to_Quat(float roll, float pitch, float yaw, Quat *quat)
{
    float cr,cp,cy,sr,sp,sy,cpcy,spsy;

    cr = cos(roll*0.5);
    cp = cos(pitch*0.5);
    cy = cos(yaw*0.5);

    sr = sin(roll*0.5);
    sp = sin(pitch*0.5);
    sy = sin(yaw*0.5);

    cpcy = cp*cy;
    spsy = sp*sy;

    quat->w = cr*cpcy + sr*spsy;
    quat->x = sr*cpcy - cr*spsy;
    quat->y = cr*sp*cy + sr*cp*sy;
    quat->z = cr*cp*sy - sr*sp*y;
}
```

A.5 Código para a Curva Slerp

```
void slerp(Quat q1, Quat q2, float t, Quat *res) {
    float to[4];
    double omega, cos, sen, sc0, sc1;
    cos = q1.x*q2.x + q1.y*q2.y + q1.z*q2.z + q1.w*q2.w;
    if(cos < 0.0) {
        cos = -cos;
        to[0] = -q2.x;
        to[1] = -q2.y;
        to[2] = -q2.z;
        to[3] = -q2.w;
    }else{
        to[0] = q2.x;
        to[1] = q2.y;
        to[2] = q2.z;
        to[3] = q2.w;
    }

    if(1.0-cos >0.003) {
        omega = acos(cos);
        sen = sin(omega);
        sc0 = sin((1.00 - t)*omega)/sen;
        sc1 = sin(t*omega)/sen;
    }else{
```

```
    sc0 = 1.00 - t;  
    sc1 = t;  
  }  
  res->x = sc0*q1.x + sc1*to[0];  
  res->y = sc0*q1.y + sc1*to[1];  
  res->z = sc0*q1.z + sc1*to[2];  
  res->w = sc0*q1.w + sc1*to[3];  
}
```

Referências Bibliográficas

- [1] Dam, Erik B., Koch, M., Lillholm M., *Quaternions, Interpolation and Animation* Technical Report DIKU-TR-98/5, University of Copenhagen, Denmark, 1998.
- [2] Eberly, David, “*Quaternion Algebra and Calculus*”, Magic Software (WWW)
- [3] Donald, B., “*A Search Algorithm for Motion Planning with Six Degrees of Freedom*”, *Artificial Intelligence*, Vol. 31, No. 3, pp.295-353, 1987.
- [4] Lima, Elon Lages, “*Álgebra Linear*”(Segunda Edição), Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq, Rio de Janeiro 1996.
- [5] Foley, J., van Dam, A., Feiner, S. e Hughes, J., “*Computer Graphics, Principles and Practice*”, Addison-Wesley Publishing Company, 2nd. ed., 1990.
- [6] Gomes, Jonas & Velho, Luiz, “*Computação Gráfica*”, Volume 1, Rio de Janeiro, IMPA, 1998.
- [7] Hamilton, Sir W. R., “*Lectures on Quaternions*” Hodges Smith & Co., Dublin, 1853.
- [8] Hoffman, K., e Kunze, R., “*Álgebra Linear*”, Editora Universidade de São Paulo e Polígono, tradução de Adalberto P. Bergamasco, 1970.

- [9] Kim, M.-S., e Nam, K.-W., “*Interpolating Solid Orientations with Circular Blending Quaternion Curves*”, *Communicating with Virtual Worlds (Proc. do CG International '93)*, N.M. Thalmann and D. Thalmann (Eds.), Springer-Verlag, Tokyo, 1993, pp. 258-269.
- [10] Shoemake, K., “*Animating Rotation with Quaternion Curves*” *Computer Graphics Proc. do SIGGRAPH'85*, Vol.19, No.3, 1985, pp.245-254.
- [11] Shoemake, K., “*Quaternion Calculus for Animation*”, *Math for SIGGRAPH ACM SIGGRAPH'91 Course Notes #2*), 1991.
- [12] Maillot, Patrick-Gilles, “*Using Quaternions for coding 3d transformations*”. In Andrew Glassner, editor, *Graphics Gems I*, capítulo 10, pp. 498-515. Academic Press, Inc., 1990.
- [13] Bobick, Nick, “*Rotating Objects Using Quaternions*”, *Game Developer Magazine*, vol. 2, No.26, 1998 (WWW).
- [14] Nielson, G. “*Smooth Interpolation of Orientations ” Model and Techniques in Computer Animations (Proc. of Computer Animations '93)*, N. M. Thalmann and D. Thalmann (Eds.), Springer-Verlag, 1993, pp. 75-93.
- [15] Pletinckx, D., “*Quaternion Calculus as a Basic Tools in Computer Graphics*”, *The Visual Computer*, Vol.5, No.1, 1989, pp.2-13.
- [16] Salamin, Eugene, “*Application Of Quaternions to Computation With Rotations*”, Working Paper, Stanford AI Lab, 1979.
- [17] Thalmann, N. M., and Thalmann, D., “*Computer Animation: Theory and Practice*”, 2nd Ed., Springer-Verlag, Tokyo, 1990.

- [18] Wang, W., and Joe, B., “*Orientation Interpolation in Quaternion Space Using Spherical Biarcs*”, *Proc. of Graphics Interface '93*, 1993, pp. 24-32.
- [19] Watt, Alan & Watt, Mark. “*Advanced Animation and Rendering Techniques Theory and Practice*”, capítulo 15. Addison-Wesley, Workingham, Inglaterra, 1992.